

## 4.2 主梁内力计算

主梁的设计内力包括恒载内力、活载内力和其他作用引起的内力（如风力或离心力引起的内力）。桥梁设计内力中恒载的计算比较简单，除了考虑实际的结构自重外，通常可以近似地将桥面铺装、人行道、栏杆等重量分摊给各片主梁来承担，按平面问题计算各片主梁的内力。鉴于人行道、栏杆等构件一般是在桥梁连成整体后安装在边梁上的，必要时为了精确起见，也可将这些恒载按下面所述实用空间计算方法计算。

由汽车荷载和人群荷载等活载引起的内力计算相对复杂些，不能象恒载那样简单按平面问题计算。梁桥由承重结构（主梁）及传力结构（横隔梁、桥面板等）两大部分组成，多片主梁依靠横隔梁和桥面板联成空间整体结构，当桥上作用荷载时，各片主梁将共同参与工作，考虑到活载的作用具有空间性，它们的受力特征属于空间结构的范畴，求解结构的内力是属于空间计算理论问题。应用空间计算理论并借助相关的桥梁结构分析软件，由计算机分析计算可得到结构上任一点的内力或挠度。

由于空间结构分析计算量相对于平面结构要大得多，为了简化计算，也便于手算，通常采用下述实用空间计算方法，将复杂的空间问题合理转化成简单的平面问题来求解主梁的内力或挠度。

### 4.2.1 实用空间计算原理

下面我们先以单梁内力计算为例，来阐明一座梁式桥在活载作用下内力计算的特点。如图 4.1a 所示的单梁，如以  $\eta_1(x)$  表示梁上某一截面的内力影响线，则就可方便地计算该截面的内力值  $S = P \cdot \eta_1(x)$ ，这里的  $\eta_1(x)$  是一个单值函数，梁在  $xOz$  平面内受力和变形，它是一种简单的平面问题。对于一座梁式板桥，或者多片主梁通过桥面板和横隔梁组成的梁桥来说（如图 4.1b），当荷载  $P$  作用在桥上时，由于结构的整体作用，各主梁、横梁不同程度的都

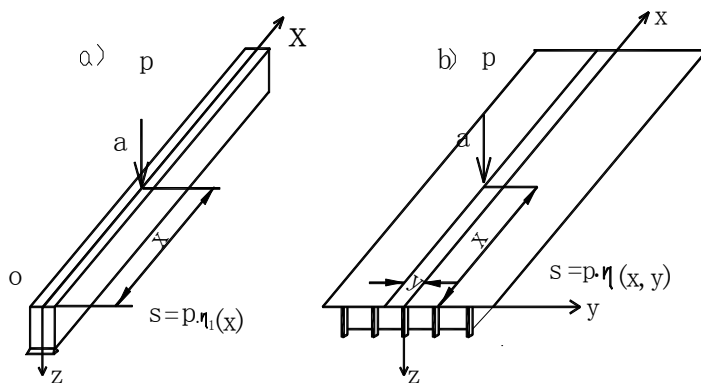


图 4.1 荷载作用下的内力计算

a) 在单梁上； b) 在梁式桥上

要产生挠曲而形成一个挠曲面，也就是说，结构的横向刚性会使荷载在  $x$  和  $y$  方向内同时发生传布，并使所有主梁都以不同程度参与工作，显示了结构变形与受力的空间性。如结构某点截面的内力影响面用双值函数  $\eta(x, y)$  来表示，则该截面的内力值可表示为  $S = P \cdot \eta(x, y)$ 。

实用空间计算方法，是将影响面  $\eta(x, y)$  分离成两个单值函数的乘积，即  $\eta_1(x) \cdot \eta_2(y)$ ，因此，对于某根主梁某一截面的内力值就可表示为

$$S = P \cdot \eta(x, y) \approx P \cdot \eta_2(y) \cdot \eta_1(x) \quad (4.1)$$

上式中  $\eta(x)$  就是单梁某一截面的内力影响线(见图 4.1a), 如果我们将  $\eta_2(y)$  看作是单位荷载沿横向作用在不同位置时对某梁所分配的荷载比值曲线, 也称作对于某梁的荷载横向分布影响线, 则  $P \cdot \eta_2(y)$  就是当  $P$  作用于  $a(x, y)$  点时沿横向分布给某梁的荷载(见图 4.1b), 暂以  $P'$  表示, 即  $P' = P \cdot \eta_2(y)$ , 这样, 就可视作某梁上作用有荷载  $P'$ , 按平面问题求得其某截面的内力值。由此, 我们可以看到空间计算实用方法原理如下:

(1) 梁桥空间计算的实用近似方法, 就是用一个近似的内力影响面去代替精确的内力影响面。近似内力影响面可用变量分离的方法得到, 其坐标为  $\bar{\eta}(x, y) = \eta_2(y) \cdot \eta_1(x)$ 。

(2) 在梁桥空间结构的近似计算中, “荷载横向分布” 仅是借用一个概念, 其实质应该是“内力” 横向分布, 而并不是“荷载” 横向分布。只是在变量分离后在计算式的表现形式上成了“荷载” 横向分布。

当桥上承受汽车荷载时, 由于沿桥宽作用的车轮荷载通常不止一个, 可在任一片主梁的荷载横向分布影响线上按横向最不利位置排列荷载, 求得其分配到的荷载最大值  $P'_{\max}$ , 令

$P'_{\max} = mP$ , 然后就可完全象图 4.1a 所示平面问题一样求得该主梁任一截面的内力值。此处  $P$  为车辆轴重,  $m$  则表示主梁在横向分配到的最大荷载比例 (通常小于 1), 称为荷载横向分布系数。

实用空间计算方法的关键是如何计算荷载横向分布影响线和荷载横向分布系数, 其实质是采用什么样的近似内力影响面代替实际的内力影响面, 既能简化计算又保证计算精度。

## 4.2.2 荷载横向分布计算

桥上荷载横向分布的规律与结构的横向连结刚度有着密切关系, 横向连结刚度愈大, 荷载横向分布作用愈显著, 各主梁的负担也愈趋均匀。因此, 需要按不同的横向连结拟定出相应的荷载横向分布计算方法。目前常用以下几种荷载横向分布计算方法:

(一) 杠杆原理法——把横向结构(桥面板和横隔梁)视作在主梁上断开而两端简支搁置在主梁上的简支梁或悬臂梁;

(二) 偏心压力法——把横隔梁视作刚性极大的梁, 当计及主梁抗扭刚度影响时, 此法又称为修正偏心压力法;

(三) 横向铰接板(梁)法——把相邻板(梁)之间视为铰接, 只传递剪力;

(四) 横向刚接梁法——把相邻主梁之间视为刚性连接, 即传递剪力和弯矩;

(五) 比拟正交异性板法——将主梁和横隔梁的刚度换算成纵横两向刚度不同的比拟弹性平板来求解, 并由实用的曲线图表进行荷载横向分布计算。

下面将分别介绍前四种计算方法, 比拟正交异性板法请参看其他有关资料。

### 1. 杠杆原理法

#### (1) 计算方法

图 4.2 为按杠杆原理法计算的受力图式, 将桥面板视作在主梁上断开, 并直接搁在工字形主梁上。当桥上有车辆荷载作用时, 板上的轮重各按简支梁反力的方式分配给左右两根主梁, 而反力  $R_i$  的大小可利用简支板的静力平衡条件求出, 这就是通常所谓作用力平衡的“杠杆原理”。如果主梁所支承的相邻两块板上都有荷载, 则该梁所受的荷载是两个支承反力之和, 如图 4.2b 中 2 号梁所受的荷载为  $R_2 = R_2' + R_2''$ 。

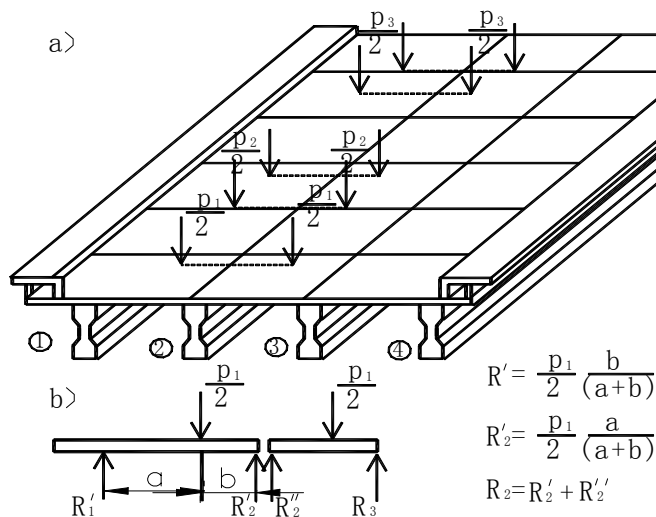


图 4.2 按杠杆原理受力图式

利用结构力学知识很容易绘出某主梁反力影响线来。此处反力影响线就是荷载横向分布影响线，如图 4.3 所示。

假定荷载横向分布影响线的竖标为  $\eta$ ，车辆荷载轴重为  $P$ ，轮重为  $P/2$  (如图 4.3 所示)，将车辆荷载按最不利情况加载，则分布到某主梁的最大荷载为：

$$P'_{\max} = \sum \frac{P}{2} \cdot \eta = \left( \frac{1}{2} \sum \eta \right) \cdot P \quad (4.2)$$

根据荷载横向分布系数的定义可知，上式的  $\frac{1}{2} \cdot \sum \eta$  即为车辆荷载横向分布系数。《桥规》(JTG D60) 规定，车道荷载横向分布系数按车辆荷载横向分布系数计，因此，两者可统称为汽车荷载横向分布系数，其值为：

$$m_{0q} = \frac{1}{2} \sum \eta_q \quad (4.3)$$

同理可得人群荷载横向分布系数为：

$$m_{0r} = \eta_r \quad (4.4)$$

式中， $m_0$  表示按杠杆原理法计算的荷载横向分布系数，拼音字母的脚标  $q$  和  $r$  相应表示汽车和人群荷载， $\eta_q$  和  $\eta_r$  分别为汽车车轮和每沿米人群荷载集度对应的荷载横向分布影响线竖标。

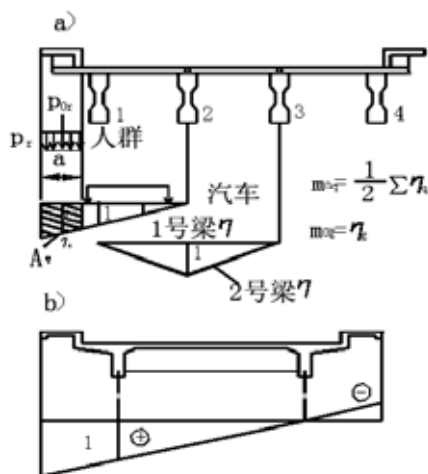


图 4.3 按杠杆原理法计算横向分布系数

杠杆原理法适用于计算荷载位于靠近主梁支点时的荷载横向分布系数,此时主梁的支承刚度远大于主梁间横向联系的刚度,受力特性与杠杆原理法接近。此外,该方法也可用于双主梁桥(见图 4.3b),或横向联系很弱的无中间横隔梁的桥梁。

## (2) 计算举例

例 4.1: 图 4.4 示一桥面净空为净—7 附 2×0.75m 人行道的钢筋混凝土 T 梁桥,共设五根主梁。试求荷载位于支点处时 1 号梁和 2 号梁相应于公路—II 级汽车荷载和人群荷载的横向分布系数。

解:

当荷载位于支点处时,应按杠杆原理法计算荷载横向分布系数。

首先绘制 1 号梁和 2 号梁的荷载横向影响线,如图 4.4b 和 c 所示。

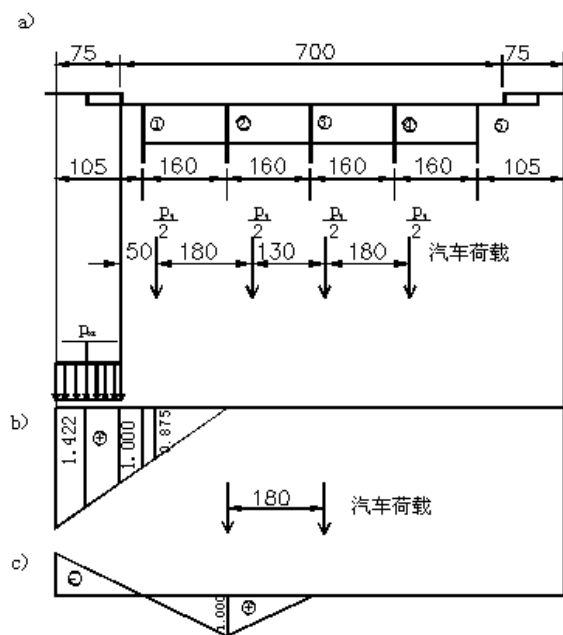


图 4.4 杠杆原理法计算横向分布系数(尺寸单位: cm)

根据《桥规》(JTG D60)规定,在横向影响线上确定荷载沿横向最不利的布置位置。图中 $P_q$ 、 $P_{or}$ 相应为汽车荷载轴重和每延米跨长的人群荷载集度; $\eta_q$ 和 $\eta_r$ 为对应于汽车车轮和人群荷载集度的影响线竖标。由此可得荷载横向分布系数为:

1 号梁

$$\text{汽车荷载} \quad m_{0q} = \frac{1}{2} \sum \eta_q = \frac{1}{2} \times 0.875 = 0.438$$

$$\text{人群荷载} \quad m_{0r} = \eta_r = 1.422$$

2 号梁

$$\text{汽车荷载} \quad m_{0q} = \frac{1}{2} \sum \eta_q = \frac{1}{2} \times 1 = 0.5$$

$$\text{人群荷载} \quad m_{0r} = \eta_r = 0$$

2 号梁人群荷载取 $m_{0r} = 0$ ,是考虑人行道上不布载为最不利情况,否则人行道荷载引起的负反力,在考虑作用效应组合时反而会减小 2 号梁的受力。

## 2. 偏心压力法

### (1) 计算原理

偏心压力法是把梁桥视作由主梁和横隔梁组成的梁格系,荷载通过横梁由一片主梁传到其他主梁上去,主梁对横梁起弹性支承作用,并假定横梁刚度无穷大,忽略主梁抗扭刚度。由此得

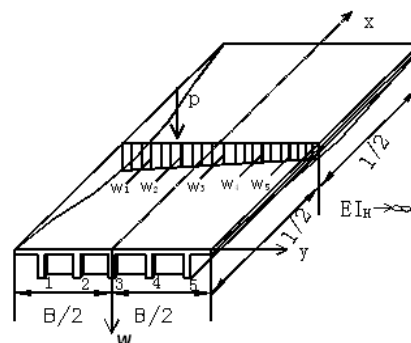


图4.5 梁桥挠曲变形(刚性横梁)

到桥梁挠曲变形如图 4.5 所示, ( $w$  为跨中竖向挠度), 它完全类似于一般材料力学中杆件偏心受压的情况, 故此法称为“偏心压力法”, 亦称“刚性横梁法”。

图 4.6 所示为一座由五片主梁组成的梁桥的跨中截面, 各片主梁的抗弯刚度  $I_i$ 、主梁的间距  $a_i$  都各不相等, 单位竖向集中荷载  $P=1$  作用在离截面扭转中心  $o$  的距离为  $e$  处。下面分析荷载在各片主梁上的横向分布情况。

由于假定横梁是刚体, 所以可以按刚体力学关于力的平移原理将荷载  $P$  移到  $o$  点, 用一个作用在扭转中心  $o$  上的竖向力  $P$  和一个作用于刚体上的偏心力矩  $M=P \cdot e=1 \cdot e$  代替。偏心荷载的作用应为  $P$  和  $M$  作用的叠加。

1) 中心荷载  $P=1$  的作用

由于作用力通过扭转中心, 而且假定横梁是刚性的, 因此横梁只作平行下挠, 各片主梁的挠度相等 (见图 4.6c), 即:

$$\omega_1' = \omega_2' = \dots = \omega_n' \quad (4.5)$$

主梁所分担的荷载为  $R_i'$  (见图 4.6c), 根据材料力学关于简支梁跨中的荷载与挠度的关系有:

$$\omega_i' = \frac{R_i' l^3}{48EI_i} \quad \text{或} \quad R_i' = \alpha I_i \omega_i' \quad (4.6)$$

式中:  $\alpha = \frac{48E}{l^3}$  = 常数 ( $E$  为梁体材料的弹性模量)。

由静力平衡条件可得:

$$\sum_{i=1}^n R_i' = P = 1 \quad (4.7)$$

联立求解式 (4.5)、(4.6) 和 (4.7) 可得:

$$R_i' = \frac{I_i}{\sum_{i=1}^n I_i} \cdot P = \frac{I_i}{\sum_{i=1}^n I_i} \quad (4.8)$$

式中  $n$  为主梁根数。

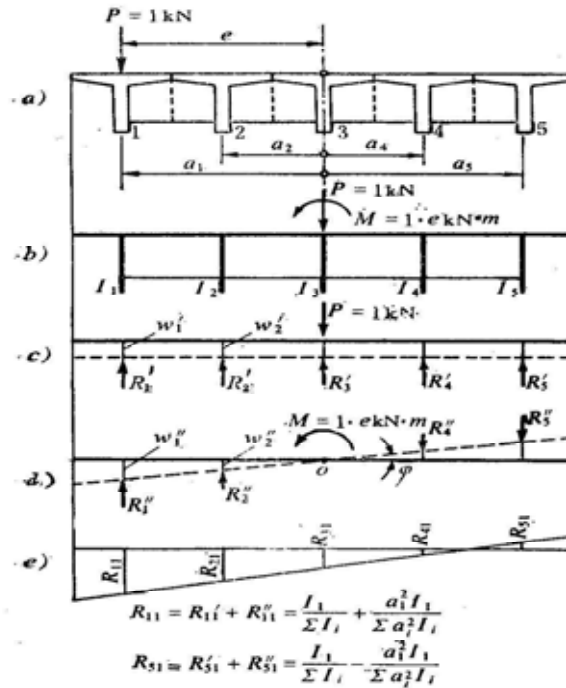


图 4.6 偏心荷载  $P=1$  对各主梁的荷载分布图

2) 偏心力矩  $M=P \cdot e=1 \cdot e$  的作用

在偏心力矩  $M=P \cdot e=1 \cdot e$  作用下，横梁绕扭转中心  $o$  转动一微小的角度  $\varphi$  (图 4.6d)，因此各根主梁产生的竖向挠度可表示为：

$$w_i'' = a_i \tan \varphi \quad (4.9)$$

由式(4.6)，主梁所受荷载与挠度的关系为：

$$R_i'' = \alpha I_i w_i'' \quad (4.10)$$

从力矩的平衡条件可知：

$$\sum_{i=1}^n R_i'' \cdot a_i = P \cdot e = 1 \cdot e \quad (4.11)$$

联立求解式 (4.9)、(4.10)和(4.11)可得：

$$R_i'' = \frac{Pe a_i I_i}{\sum_{i=1}^n a_i^2 I_i} = \frac{e a_i I_i}{\sum_{i=1}^n a_i^2 I_i} \quad (4.12)$$

3) 偏心荷载  $P=1$  产生的总作用力

偏心荷载  $P$  作用于  $k$  号梁时，在  $i$  号梁上产生的总作用力，即  $i$  号主梁所分配到的荷载，等于上述两种情况的叠加，即：

$$R_{ik} = R_{ik}' \pm R_{ik}'' = \frac{I_i}{\sum_{i=1}^n I_i} P \pm \frac{a_i a_k I_i}{\sum_{i=1}^n a_i^2 I_i} P = \frac{I_i}{\sum_{i=1}^n I_i} \pm \frac{a_i a_k I_i}{\sum_{i=1}^n a_i^2 I_i} \quad (4.13)$$

当  $e$  和  $a_i$  位于同一侧时，上式第二项取正号，反之应取负号。上式是在不等间距、不等刚度的结构中推导出来的，但大多数的梁桥还是做成等间距、等刚度的，从式中很容易得到这种梁桥的主梁荷载分配表达式：

$$R_{ik} = R_{ik}' \pm R_{ik}'' = \frac{1}{n} P \pm \frac{a_i a_k}{\sum_{i=1}^n a_i^2} P = \frac{1}{n} \pm \frac{a_i a_k}{\sum_{i=1}^n a_i^2} \quad (4.14)$$

不难得到关系式：

$$R_{ik} = R_{ki} \frac{I_i}{I_k} \quad (4.15)$$

4) 求荷载横向分布系数  $m$

根据式 (4.13) 和(4.14)即可计算出第  $k$  号主梁在  $P=1$  作用在任意  $i$  号梁时的反力  $R_{ki}$ ，并据此绘制  $k$  号主梁反力影响线，亦即  $k$  号主梁荷载横向分布影响线，影响线竖标通常写成  $\eta_{ki}$ 。

如果各根主梁的截面尺寸相同，则：

$$\eta_{ki} = R_{ki} = R_{ik} = \frac{I_k}{\sum_{i=1}^n I_i} \pm \frac{a_k a_i I_k}{\sum_{i=1}^n a_i^2 I_i} = \frac{1}{n} \pm \frac{a_k a_i}{\sum_{i=1}^n a_i^2} \quad (4.16)$$

图 4.6e 即为 1 号主梁荷载横向分布影响线。由于荷载横向分布影响线呈直线分布，实际上只需计算两个影响线竖标即可。

有了荷载横向影响线，就可以按最不利情况横向布载，并按式 (4.3) 和 (4.4) 分别计算汽车和人群荷载横向分布系数，式中下标 0 改为  $c$ ，即：

$$\text{汽车荷载} \quad m_{cq} = \frac{1}{2} \sum \eta_q \quad (4.17)$$

$$\text{人群荷载} \quad m_{cr} = \eta_r \quad (4.18)$$

偏心压力法适用于具有可靠横向联结，且宽跨比  $B/L$  小于或接近于 0.5 的桥(一般称为窄桥)。

## (2) 修正偏心压力法

偏心压力法计算中由于作了横隔梁近似绝对刚性和忽略主梁抗扭刚度的两项假定，这就导致了边梁受力偏大的计算结果。为了减小计算误差，可在按偏心压力法计算时考虑主梁的抗扭刚度。

由前面已知，偏心压力法计算荷载横向分布影响线竖标的公式为：

$$\eta_{ki} = \frac{I_k}{\sum_{i=1}^n I_i} \pm \frac{a_k a_i I_k}{\sum_{i=1}^n a_i^2 I_i}$$

上式中等号右边第一项是由中心荷载  $P=1$  所引起，此时各主梁只发生挠度而无转动(参见图 4.6)，显然它与主梁的抗扭无关。等号右边的第二项是由偏心力矩  $M=P \cdot e=1 \cdot e$  作用引起的各片主梁的竖向位移，很明显由于截面的转动，各主梁不仅会发生竖向挠度，而且还必然同时引起扭转，可是在上式中却没有计入主梁的抗扭作用。由此可见，要计入主梁抗扭影响，只需对等式第二项给予修正。

下面就研究在力矩  $M=P \cdot e=1 \cdot e$  作用下桥梁的变形和受力情况。如图 4.7 所示，还是取跨中截面来分析，在  $M$  作用下每片主梁除产生不相同的挠度  $w_i''$  外尚转动一个相同的  $\varphi$  角(如图 4.7b)。如设荷载通过跨中的刚性横隔梁传递，截出此横隔梁作为脱离体来分析，可得各片主梁对横隔梁的反作用为竖向力  $R_i''$  和扭矩  $M_{Ti}$ (图 4.7c)。

根据平衡条件：

$$\sum_{i=1}^n R_i'' a_i + \sum_{i=1}^n M_{Ti} = 1 \cdot e \quad (4.19)$$

由材料力学，简支梁考虑自由扭转时跨中截面扭矩与扭角以及竖向力与挠度的关系为：

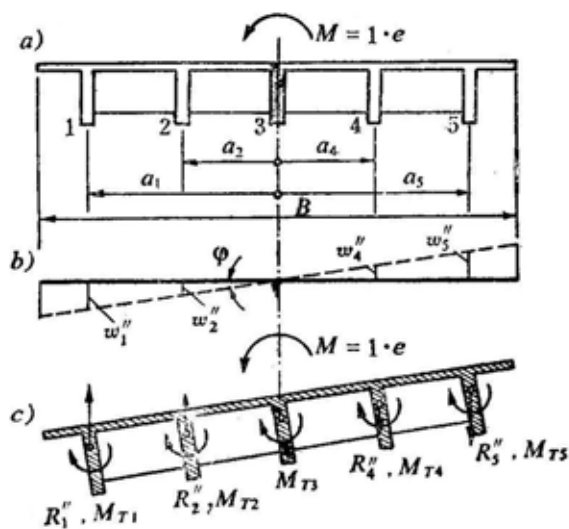


图 4.7 考虑主梁抗扭的计算图示

$$\varphi = \frac{lM_{Ti}}{4GI_{Ti}} \quad \text{和} \quad \omega_i'' = \frac{R_i'' l^3}{48EI_i} \quad (4.20)$$

式中： $l$ 为简支梁的跨度， $I_{Ti}$ 为梁的抗扭惯矩， $G$ 为材料的剪切模量，其余符号同前。

而从几何关系有(图 4.7b)：

$$\varphi \approx tg \varphi = \frac{\omega_i''}{a_i} \quad (4.21)$$

联立求解式 (4.19)、(4.20)和(4.21)，可得到任意  $k$  号梁的反力为：

$$R_k'' = \beta \frac{ea_k I_k}{\sum_{i=1}^n a_i^2 I_i} \quad (4.22)$$

因此，可得考虑主梁抗扭刚度后任意  $K$  号梁的横向影响线竖标为：

$$\eta_{ki} = \frac{I_k}{\sum_{i=1}^n I_i} \pm \beta \frac{ea_k I_k}{\sum_{i=1}^n a_i^2 I_i} \quad (4.23)$$

式中：

$$\beta = \frac{1}{1 + \frac{Gl^2}{12E} \frac{\sum I_{Ti}}{\sum a_i^2 I_i}} < 1 \quad (4.24)$$

称为抗扭修正系数，它与梁号无关，纯粹取决于结构的几何尺寸和材料特性。

由此可见，与偏心压力法公式不同点仅在于第二项上乘了小于 1 的抗扭修正系数  $\beta$ ，所以此法称为“修正偏心压力法”。

对于简支梁桥，若主梁的截面均相同，即  $I_i = I$ ， $I_{Ti} = I_T$ ，则：

$$\eta_{ki} = \frac{1}{n} \pm \beta \frac{a_k a_i}{\sum_{i=1}^n a_i^2} \quad (4.25)$$

此处：

$$\beta = \frac{1}{1 + \frac{nl^2 GI_T}{12EI \sum a_i^2}} \quad (4.26)$$

由式 (4.26) 可以看出，当桥梁宽度一定时，随着跨度增大， $\beta$  减小，也就是说抗扭刚度对横向分布系数影响增大。式中混凝土的剪切模量  $G$  可取  $0.4E$ ；对于由矩形组合而成的梁截面，如  $T$  形或  $I$  字形梁，其抗扭惯矩  $I_T$  近似等于各个矩形截面的抗扭惯矩之和：

$$I_T = \sum_{i=1}^m c_i b_i t_i^3 \quad (4.27)$$



式中： $b_i$ 和 $t_i$ ——相应为单个矩形截面的宽度和厚度

$c_i$ ——矩形截面抗扭刚度系数，根据 $t/b$ 比值按表 4.1 计算，

$m$ ——梁截面划分成单个矩形截面的块数。

表 4.1 矩形截面抗扭刚度系数

$t/b$	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	<0.1
$c$	0.141	0.155	0.171	0.189	0.209	0.229	0.250	0.270	0.291	0.312	1/3

### (3) 计算举例

例 4.2：有一座计算跨径  $l=19.50\text{m}$  的桥梁，横截面如图 4.8a 所示，各主梁截面相同，试求荷载位于跨中时 1 号边梁的荷载横向分布系数  $m_{cq}$  (汽车荷载) 和  $m_{cr}$  (人群荷载)。

解：

此桥在跨度内设有横隔梁，具有强大的横向连结刚性，且承重结构的跨宽比为：

$$\frac{l}{B} = \frac{19.50}{5 \times 1.60} = 2.4 > 2$$

故可按偏心压力法来绘制横向影响线并计算横向分布系数  $m_c$ 。

本桥各根主梁的横截面均相等，梁数  $n=5$ ，梁间距为  $1.60\text{m}$ ，则：

$$\sum_{i=1}^5 a_i^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2$$

$$= (2 \times 1.60)^2 + 1.60^2 + 0 + (-1.60)^2 + (2 \times 1.60)^2 = 25.60\text{m}^2$$

由式 (4.16) 可得 1 号梁横向影响线的竖标值为：

$$\eta_{11} = \frac{1}{n} + \frac{a_1^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} = \frac{1}{5} + \frac{(2 \times 1.60)^2}{25.60} = 0.20 + 0.40 = 0.60$$

$$\eta_{15} = \frac{1}{n} - \frac{a_1^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} = 0.2 - 0.4 = -0.2$$

由  $\eta_{11}$  和  $\eta_{15}$  绘制的 1 号梁横向影响线，见图 4.8b，图中并按《桥规》(JTG D60) 规定确定了汽车荷载的最不利荷载位置。

设横向影响线的零点至 1 号梁位的距离为  $x$ ，则

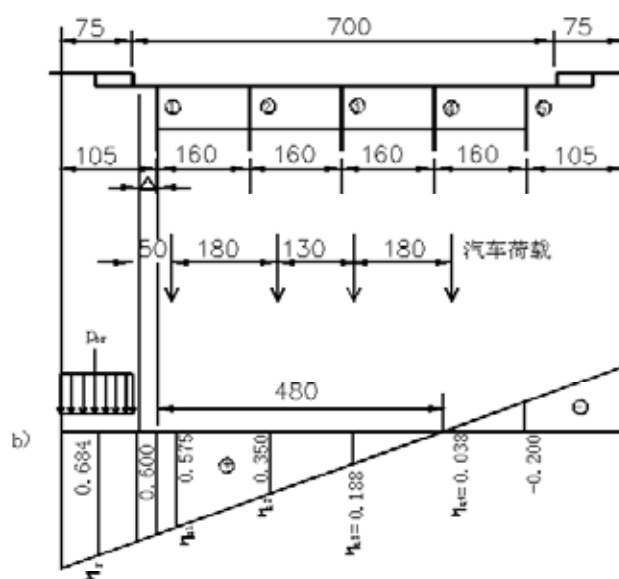


图 4.8 横向分布系数计算图示(尺寸单位: cm)

a) 桥梁横截面 b) 1 号梁荷载横向分布影响线

$$\frac{x}{0.60} = \frac{4 \times 1.60 - x}{0.2}; \quad \text{解得: } x = 4.80 \text{ m}$$

设人行道缘石至 1 号梁轴线的距离为  $\Delta$ ，则：

$$\Delta = (7.00 - 4 \times 1.60) / 2 = 0.3 \text{ m}$$

根据几何关系，左侧第一个轮重对应的影响线竖标为(以  $x_{q1}$  表示影响线零点至汽车车轮的横坐标距离)：

$$\eta_{q1} = \frac{\eta_{11}}{x} x_{q1} = \frac{0.60}{4.80} \times (4.80 + 0.3 - 0.5) = 0.575$$

同理可得各轮重和人群荷载集度对应的影响线竖标分别为（见图 4.8b）：

$$\eta_{q2} = 0.350 \quad \eta_{q3} = 0.188 \quad \eta_{q4} = -0.038 \quad \eta_r = 0.684$$

于是，1 号梁的活载横向分布系数可计算如下：

$$\begin{aligned} \text{汽车荷载 } m_{cq} &= \frac{1}{2} \sum \eta_q = \frac{1}{2} \times (\eta_{q1} + \eta_{q2} + \eta_{q3} + \eta_{q4}) \\ &= \frac{1}{2} \times (0.575 + 0.350 + 0.188 - 0.038) = 0.538 \end{aligned}$$

$$\text{人群荷载 } m_{cr} = \eta_r = 0.684$$

例 4.3：为了进行比较，按修正偏心压力法计算例 4.2。T 形主梁的细部尺寸如图 4.9 所示。

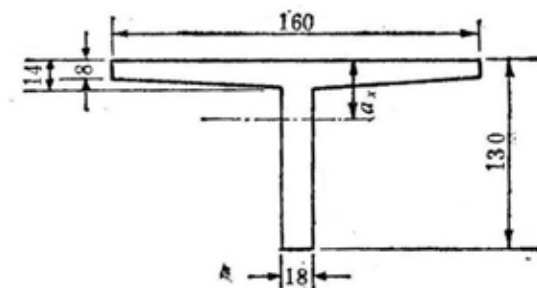


图 4.9 主梁截面尺寸（单位：cm）

解：

①计算  $I$  和  $I_T$

翼板的换算平均高度：

$$h = \frac{8 + 14}{2} = 11 \text{ cm}$$

主梁截面重心位置：

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{(160 - 18) \times 11 \times \frac{11}{2} + 130 \times 18 \times \frac{130}{2}}{(160 - 18) \times 11 + (130 \times 18)} \\ &= 41.2 \text{ cm} \end{aligned}$$

主梁抗弯惯矩：

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{12} \times (160 - 18) \times 11^3 + (160 - 18) \times 11 \left(41.2 - \frac{11}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \times 18 \times 130^3 \\ &\quad + 18 \times 130 \left(\frac{130}{2} - 41.2\right)^2 \\ &= 6627500 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

主梁抗扭惯矩按式（4.27）查表 4.1 计算：

对于翼板:  $t_1/b_1 = 0.11/1.60 = 0.0687 < 0.1$ , 查表得  $c_1 = \frac{1}{3}$

对于梁肋:  $t_2/b_2 = 0.18/1.19 = 0.151$ , 查表得  $c_2 = 0.301$ , 则:

$$I_T = \frac{1}{3} \times 160 \times 11^3 + 0.301 \times 119 \times 18^3 = 279870 \text{ cm}^4$$

②计算抗扭修正系数  $\beta$

取  $G = 0.4E$ , 代入式(4.26)得:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{1 + \frac{5 \times 1950^2 \times 0.425E \times 279870}{12 \times E \times 6627500 \times 256000}} \\ &= \frac{1}{1 + 1.042 \times 0.01796 \times 5.91} = \frac{1}{1.111} = 0.900 \end{aligned}$$

③计算横向影响线竖标值

对于 1 号边梁考虑抗扭修正后的横向影响线竖标值为:

$$\begin{aligned} \eta'_{11} &= \frac{1}{n} + \beta \frac{a_1^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} = 0.2 + 0.90 \times 0.40 = 0.56 \\ \eta'_{15} &= \frac{1}{n} - \beta \frac{a_1^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} = 0.20 - 0.90 \times 0.40 = -0.16 \end{aligned}$$

设影响线零点离 1 号梁轴线的距离为  $x'$ , 则:

$$\frac{x'}{0.56} = \frac{4 \times 1.60 - x'}{0.16}, \text{ 解得 } x' = 4.98 \text{ m}$$

④计算荷载横向分布系数

1 号边梁的横向影响线和布载图式如图 4.10 所示。

汽车荷载

$$\begin{aligned} m'_{cq} &= \frac{1}{2} \sum \eta'_q \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta'_{11}}{x'} (x'_{q1} + x'_{q2} + x'_{q3} + x'_{q4}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{0.56}{4.98} (4.78 + 2.98 + 1.68 - 0.12) \\ &= 0.524 \end{aligned}$$

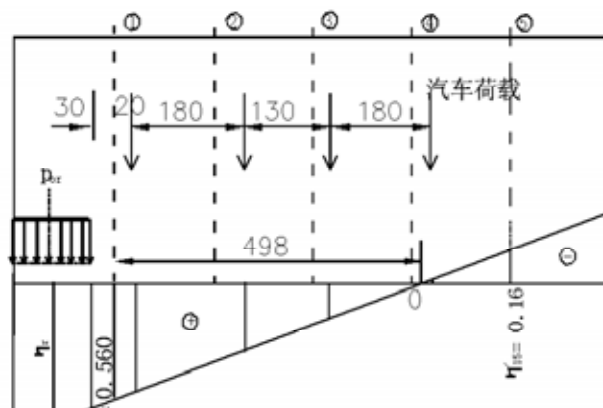


图 4.10 修正偏压法  $m_c$  计算图式

人群荷载

$$m'_{cr} = \eta_r = \frac{0.56}{4.98} (4.98 + 0.30 + \frac{0.75}{2}) = 0.636$$

本例计算结果表明，计及抗扭影响的 $m'_{cq}$ 、 $m'_{cr}$ 比不计抗扭影响的 $m_{cq}$ 和 $m_{cr}$ ，相应降低 2.6% 和 7.0%。

### 3. 铰接板（梁）法

对于用现浇混凝土纵向企口缝连结的装配式板桥以及仅在翼板间用焊接钢板或伸出交叉钢筋连结的无中间横隔梁的装配式桥，由于块件间横向具有一定的连结构造，但其连结刚性又很薄弱，因此对于跨中荷载横向分布的计算，上面所述的“杠杆原理法”和“偏心压力法”均不适用。鉴于这类结构的受力状态实际接近于数根并列而相互间横向铰接的狭长板（梁），以此为基础发展了横向铰接板（梁）理论来计算荷载的横向分布。

#### (1) 计算原理

下面首先以铰接板梁桥为例介绍铰接板（梁）法计算原理，然后再介绍 T 形桥梁计算特点。

图 4.11a 是一座铰接板桥。为了求算  $P$  作用下的荷载横向分布，铰接板（梁）法作了下面三个基本假定。

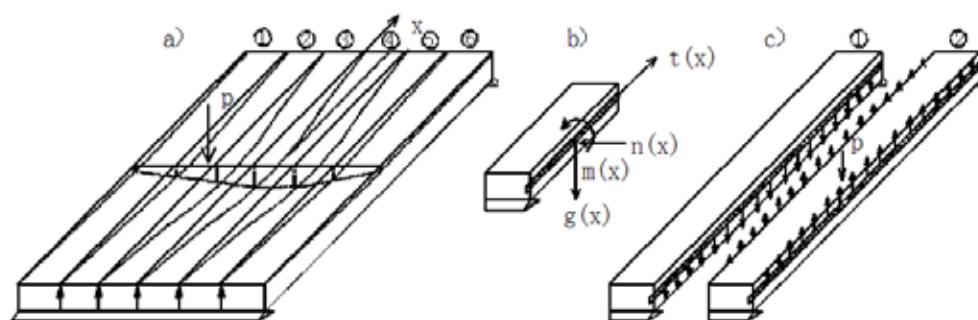


图 4.11 铰接板桥受力示意图

1) 假定竖向荷载作用下结合缝内只传递竖向剪力  $g(x)$ 。横向弯矩  $m(x)$ 、纵向剪力  $t(x)$  和法向力  $n(x)$  均略去不计（图 4.11b）。

2) 将荷载  $P$  按三角正弦级数展开，取其中第一项，即用半波正弦荷载  $p(x) = p_0 \sin \frac{\pi x}{l}$  代替原集中荷载  $P$ （图 4.12a），由此，各条结合缝内也产生正弦分布的竖向剪力

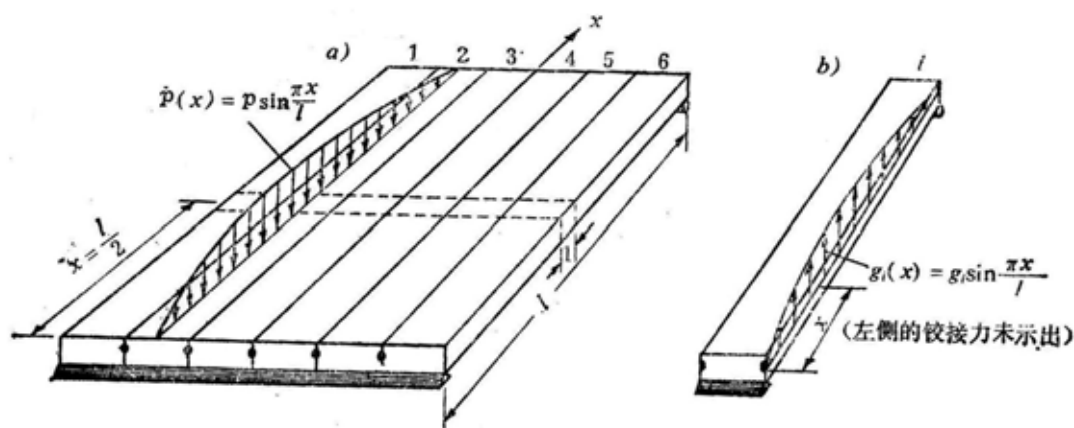


图 4.12 铰接板桥近似受力图式

$$g_i(x) = g_i \sin \frac{\pi x}{l} \text{ (图 4.12b)}。$$

采用半波正弦荷载的原因，是根据梁的挠曲理论，主梁的弯矩  $M(x)$  和剪力  $Q(x)$  等于其挠度在桥孔方向  $(x)$  的二阶和三阶的微商乘以它的截面抗弯刚度  $EI$ ，即：

$$M(x) = -EIw''(x)$$

$$Q(x) = -EIw'''(x) \quad (4.28)$$

当集中荷载  $P$  横向分布给各片板梁  $P_i$  ( $i=1 \sim n$ )，则各片板梁的挠度  $w(x)$ 、弯矩  $M(x)$  和剪力  $Q(x)$  之间都应当存在同其所受荷载的大小一样的比例。例如，对于 1 号板梁和 2 号板梁应有：

$$\frac{w_1(x)}{w_2(x)} = \frac{M_1(x)}{M_2(x)} = \frac{Q_1(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \text{常数}$$

代入式 (4.28) 则有：

$$\frac{w_1(x)}{w_2(x)} = \frac{w_1''(x)}{w_2''(x)} = \frac{w_1'''(x)}{w_2'''(x)} = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \text{常数} \quad (4.29)$$

但是，实际上无论对于集中轮重或分布荷载的作用情况，上式都不成立，只有半波正弦荷载时才成立。

需要说明的是，用正弦荷载代替跨中的集中荷载，在计算各梁跨中挠度时的误差很小，而且，计算内力时虽有稍大的误差，但考虑到实际计算时有许多车轮沿桥跨分布，误差又进一步减少。

3) 每块板梁在偏心荷载下只产生垂直位移  $w$  和转角  $\varphi$ ，而不发生横向弯曲(图 4.14c)。

对于研究各条板梁所分布荷载的相对规律来说，方便地在跨中截取单位长度来进行分析不失其一般性，因此铰接板横向分布计算图式如图 4.13 所示。图中  $P=1$  和  $g_i$  是荷载和铰接力三角函数的幅值。显然， $g_i$  是待定的四个赘余力的幅值，应用结构力学中的力法，可以列出四个正则方程如下：

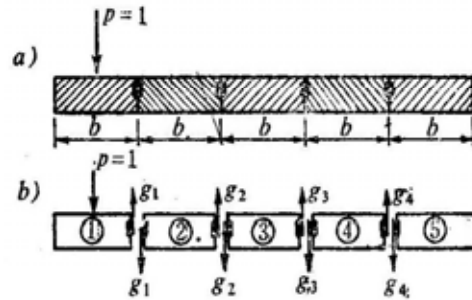


图 4.13 铰接板桥计算图式

$$\delta_{11}g_1 + \delta_{12}g_2 + \delta_{13}g_3 + \delta_{14}g_4 + \delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21}g_1 + \delta_{22}g_2 + \delta_{23}g_3 + \delta_{24}g_4 + \delta_{2p} = 0$$

$$\delta_{31}g_1 + \delta_{32}g_2 + \delta_{33}g_3 + \delta_{34}g_4 + \delta_{3p} = 0$$

$$\delta_{41}g_1 + \delta_{42}g_2 + \delta_{43}g_3 + \delta_{44}g_4 + \delta_{4p} = 0 \quad (4.30)$$

式中： $\delta_{ik}$ ——铰接缝 $k$ 内作用单位正弦铰接力，在铰接缝 $i$ 处引起的竖向相对位移；

$\delta_{ip}$ ——外荷载 $p$ 在铰接缝 $i$ 处引起的竖向位移。

为了确定正则方程中的常系数  $\delta_{ik}$  和  $\delta_{ip}$ ，我们来考察图 4.14a 所示任意板梁在左边铰缝内作用单位正弦铰接力的典型情况。图 4.14b 为跨中单位长度截割段的示意图。

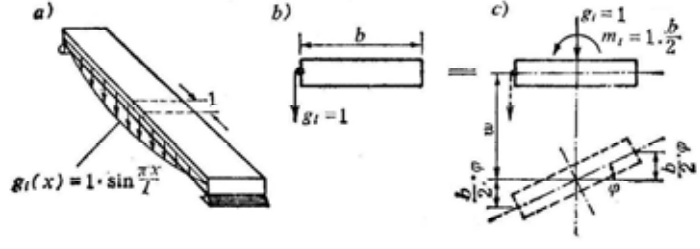


图 4.14 板梁的典型受力图示

图 4.14c 示出了板的变形情况，依据图 4.13b 的基本体系，就可写出正则方程(4.30)中的常系数：

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = \delta_{44} = 2 \left( w + \frac{b}{2} \varphi \right)$$

$$\delta_{12} = \delta_{23} = \delta_{34} = \delta_{21} = \delta_{32} = \delta_{43} = - \left( w - \frac{b}{2} \varphi \right)$$

$$\delta_{13} = \delta_{14} = \delta_{24} = \delta_{31} = \delta_{41} = \delta_{42} = 0$$

$$\delta_{1p} = -w$$

$$\delta_{2p} = \delta_{3p} = \delta_{4p} = 0$$

将上述的系数代入式(4.30)，使全式除以  $w$  并设刚度参数  $\gamma = \frac{b}{2} \frac{\varphi}{w}$ ，则得正则方程化

简形式：

$$2(1+\gamma)g_1 - (1-\gamma)g_2 = 1$$

$$-(1-\gamma)g_1 + 2(1+\gamma)g_2 - (1-\gamma)g_3 = 0$$

$$-(1-\gamma)g_2 + 2(1+\gamma)g_3 - (1-\gamma)g_4 = 0$$

$$-(1-\gamma)g_3 + 2(1+\gamma)g_4 = 0 \quad (4.31)$$

由此可见，只要确定了刚度参数  $\gamma$ 、板块数量  $n$  和荷载作用位置，就可解出所有  $n-1$  个未知铰接力的幅值。根据力的平衡原理，可得到荷载作用下分配到各板块的竖向荷载的幅值。

$$1 \text{ 号板} \quad p_{11} = 1 - g_1$$

$$2 \text{ 号板} \quad p_{21} = g_1 - g_2$$

$$3 \text{ 号板} \quad p_{31} = g_2 - g_3$$

$$4 \text{ 号板} \quad p_{41} = g_3 - g_4$$

$$5 \text{ 号板} \quad p_{51} = g_4 \quad (4.32)$$

下面将以图 4.15 的 1 号板梁为例介绍如何绘制荷载横向分布影响线。

对于弹性板梁，荷载与挠度呈正比关系，即

$$p_{i1} = \alpha_1 w_{i1}, \text{ 同理 } p_{li} = \alpha_2 w_{li}$$

由变位互等定理  $w_{i1} = w_{li}$ ，且每块板梁的截面相同(比例常数  $\alpha_1 = \alpha_2$ )，就得

$$p_{li} = p_{i1}$$

上式表明，单位荷载作用在 1 号板梁轴线上时任一板梁所分配的荷载，就等于单位荷载作用于任意板梁轴线上时 1 号板梁所分配到的荷载，这就是 1 号板梁荷载横向影响线的竖标值，通常以  $\eta_{li}$  来表示。最后，利用式(4.32)，就得 1 号板梁横向影响线的各竖标值为：

$$\eta_{11} = p_{11} = 1 - g_1$$

$$\eta_{12} = p_{21} = g_1 - g_2$$

$$\eta_{13} = p_{31} = g_2 - g_3$$

$$\eta_{14} = p_{41} = g_3 - g_4$$

$$\eta_{15} = p_{51} = g_4 \quad (4.33)$$

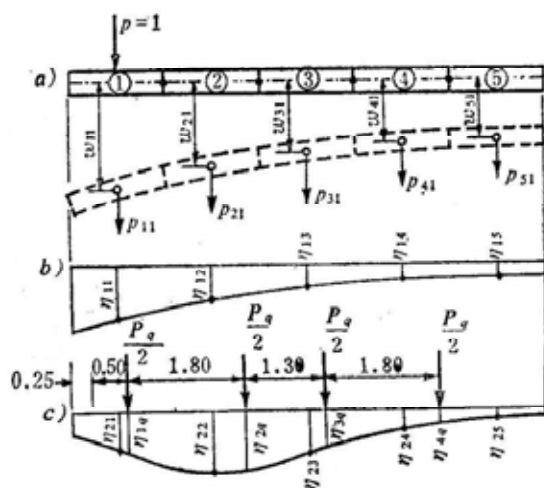


图 4.15 跨中的荷载横向影响线

据此绘制 1 号板梁的横向影响线如图 4.15b 所示，同理，可绘制 2 号板梁的横向影响线如图 4.15c 所示。

在实际进行设计时，可以利用对于板块数目  $n=3\sim 10$  所编制的各号板的横向影响线竖标计算表格(见附录 I)。

有了跨中荷载横向影响线，就可以按前述方法计算各类荷载的跨中横向分布系数  $m_c$ 。

(2) 刚度参数  $\gamma$  值的计算

刚度参数  $\gamma = \frac{b}{2} \varphi / w$ ，为了计算  $\gamma$ ，首先要确定偏心的正弦荷载作用下，所产生的简支板梁跨中竖向挠度  $w$  和扭角  $\varphi$ ，见图 4.16。

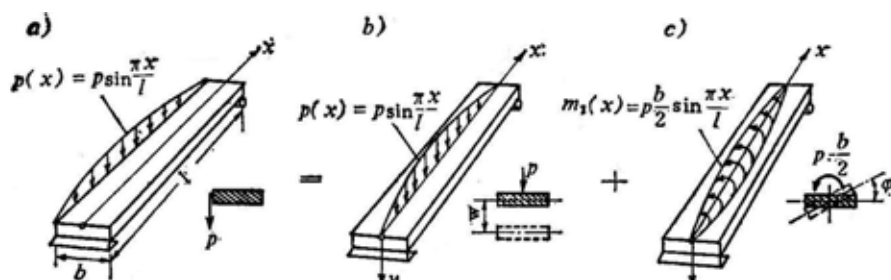


图 4.16  $\gamma$  值的计算图式

根据梁的挠曲理论可得微分方程：

$$EIw''''(x) = p(x) = p \sin \frac{\pi x}{l} \quad (4.34)$$

式中  $E$ 、 $I$  分别为材料的弹性模量和板梁的抗弯惯性矩。

根据梁的扭转理论可得微分方程：

$$GI_T \varphi''(X) = -m_T(x) = -\frac{b}{2} \cdot p \sin \frac{\pi x}{l} \quad (4.35)$$

式中  $G$ 、 $I_T$  分别为材料的剪切模量和板梁的抗扭惯性矩。

对式 (4.34) 和 (4.35) 积分，并代入边界条件得：

$$w(x) = \frac{pl^4}{\pi^4 EI} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (4.36)$$

$$\varphi(x) = \frac{pbl^2}{2\pi^2 GI_T} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (4.37)$$

根据上两式可得到跨中 ( $x = \frac{l}{2}$ ) 挠度和转角为：

$$w = \frac{pl^4}{\pi^4 EI} \quad (4.38)$$

$$\varphi = \frac{pbl^2}{2\pi^2 GI_T} \quad (4.39)$$

因而可得到刚度参数  $\gamma$  的计算式如下：

$$\gamma = \frac{b}{2} \varphi / \omega = \frac{b}{2} \cdot \left( \frac{pbl^2}{2\pi^2 GI_T} \right) / \left( \frac{pl^4}{\pi^4 EI} \right) = \frac{\pi^2 EI}{4GI_T} \left( \frac{b}{l} \right)^2 \approx 5.8 \frac{I}{I_T} \left( \frac{b}{l} \right)^2 \quad (4.40)$$

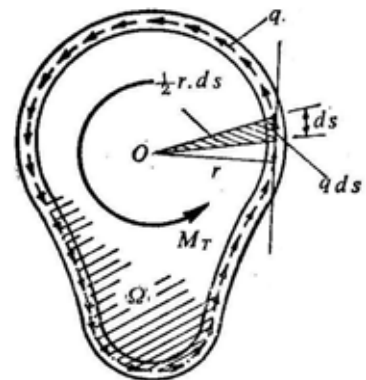
式中对于混凝土取用  $G = 0.4E$ 。

#### (4) 主梁抗扭惯矩 $I_T$ 的计算

在求解主梁荷载横向分布中，需计算主、横梁的抗扭惯矩  $I_T$ 。对于矩形截面或多个矩形组成的开口截面，例如 T 形、I 形等截面，可按式(4.27)并查表 4.1 计算抗扭惯矩  $I_T$ 。

对于图 4.18a 所示的单箱式的薄壁箱形截面，其  $I_T$  的计算可分为两部分：两边悬出的开口部分和闭合薄壁部分。悬出部分可按矩形截面计算公式 (4.27) 计算，薄壁闭合部分可将其视作任意形状薄壁闭合截面的特例来计算。

设有一任意不等厚的薄壁闭合截面杆件承受纯扭矩  $M$  的作用，其截面如图 4.17 所示，壁厚为  $t$ ，由于壁不厚，可以认为剪应力均匀分布于厚度方向，但沿截面周边  $S$  方向的剪力流分布可能是变化的。可以证明沿壁作用的单位周长上的剪力  $\tau \cdot t$  是一个常数， $q = \tau \cdot t$  称为剪力流。





如图 4.17 所示，现取横截面的扭心  $o$ ，每个截面长度  $ds$  范围内的剪力  $qds$  对  $o$  点的力矩为  $q \cdot rds$ ，此处  $r$  为  $o$  点至剪力  $qds$  作用线的距离。沿整个周长进行积分所得到的力矩，一定和外矩  $M_T$  相等，即：

图 4.17 薄壁截面上的剪力流

$$M_T = \oint q \cdot rds = q \oint rds = 2\Omega q$$

即剪力流：

$$q = \tau \cdot t = \frac{M_T}{2\Omega} \quad (4.41)$$

式中： $\Omega$ ——薄壁中线所围的面积。

剪切变形  $\gamma = \tau/G$ ，所以，单位体积的应变能为  $\tau^2/2G$ ，因此薄壁管单位长度内的应变能为：

$$\bar{U} = \oint \frac{\tau^2}{2G} \cdot t \cdot ds = \frac{(\pi)^2}{2G} \oint \frac{ds}{t} = \frac{M_T^2}{8G\Omega^2} \oint \frac{ds}{t}$$

则，单位长度构件上扭矩所作之功为：

$$\bar{W} = \frac{1}{2} M_T \cdot \varphi = \frac{M_T^2}{2GI_T} \quad (\because \text{扭角 } \varphi = \frac{M_T}{GI_T})$$

令单位长度的应变能等于单位长度构件上扭矩所作之功，最后可得出任意形状封闭薄壁截面的抗扭惯矩计算公式：

$$I_T = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}} \quad (4.42)$$

对于薄壁箱形截面闭合部分(如图 4.18b)，可将式 (4.42) 具体写成：

$$I_T' = (s_1 + s_2)^2 h^2 \frac{1}{2 \frac{s}{t} + \frac{s_1}{t_1} + \frac{s_2}{t_2}} \quad (4.43)$$

因此，薄壁箱形截面抗扭惯矩为：

$$\begin{aligned} I_T &= \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{t}} + \sum_{i=1}^n c_i b_i t_i^3 \\ &= (s_1 + s_2)^2 h^2 \frac{1}{2 \frac{s}{t} + \frac{s_1}{t_1} + \frac{s_2}{t_2}} + 2cd_1 h_1^3 \end{aligned} \quad (4.44)$$

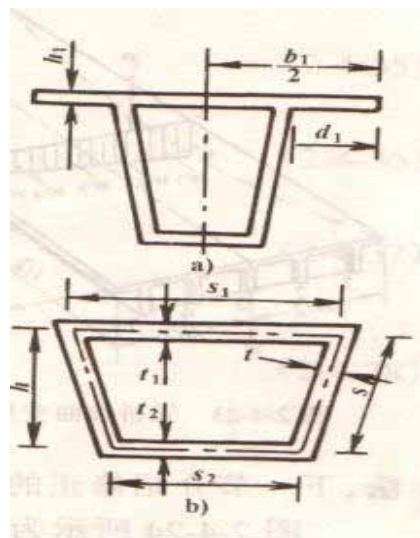


图 4.18 箱形截面

式中  $c$  由  $\frac{h_1}{d_1}$  之值查表 4.1 求得。对于由  $n$  个箱拼连成的截面，其抗扭惯矩可近似地按各个单箱截面抗扭惯矩之和计算。

#### (5) 铰接 T 形梁桥的计算特点

小跨径的钢筋混凝土 T 形梁桥，为了便于预制施工，往往不设中间横隔梁，仅对翼板的板边适当连结，或者仅由现浇的桥面板使各梁连结在一起。这种梁桥的横向连结刚度很弱，其受力特点就象横向铰接的结构。此外，对于无横隔梁的组合式梁桥，也因横向连结刚度小而可以近似作为横向铰接来计算。下面将阐明横向铰接 T 形梁桥，与铰接板桥相比较，在计算荷载横向分布方面的不同特点。

图 4.19a 和 b 表示一座铰接 T 形梁桥在单位正弦荷载作用下沿跨中单位长度截割段的铰接力计算图式。如果将它们与前面铰接板桥计算图式图 4.13a 和 b 相比较，可见两者对于荷载横向分配的表达式(4.32)是完全一样的。唯一不同之点是利用式(4.30)的正则方程求铰接力  $g_i$  时，在所有主系数  $\delta_{ii}$  中除了考虑  $w$  和  $\phi$  的影响外，还应计入 T 形梁翼板悬臂端的弹性挠度  $f$  (见图 4.19d)。鉴于翼缘板边缘有单位正弦荷载作用时，翼板可视为在梁肋处固定的悬臂板，其板端挠度接近于正弦分布，即

$$f(x) = f \sin \frac{\pi x}{l} \quad (f \text{ 为 挠 度 幅 值})$$

值)，如图 4.19c 所示，则得：

$$f = \frac{d_1^3}{3EI_1} = \frac{4d_1^3}{Eh_1^3}$$

式中：  $d_1$  ——翼板的悬出长度；

$h_1$  ——翼板厚度；对于变厚度的翼板，可近似地取距离梁

肋  $\frac{d_1}{3}$  处的板厚来计算，见图

4.19c；

$I_1$  ——单位宽度翼板

的抗弯惯矩，  $I_1 = \frac{h_1^3}{12}$ 。

因此，对于铰接 T 形梁桥，正则方程(4.30) 中只有  $\delta_{ii}$  应改为：

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = \dots = 2 \left( w + \frac{b}{2} \phi + f \right)$$

$$\text{如令 } \beta = \frac{f}{w}, \text{ 则得： } \beta = \frac{4d_1^3}{Eh_1^3} / \frac{l^4}{\pi^4 EI} \approx 390 \frac{I}{l^4} \left( \frac{d_1}{h_1} \right)^3$$

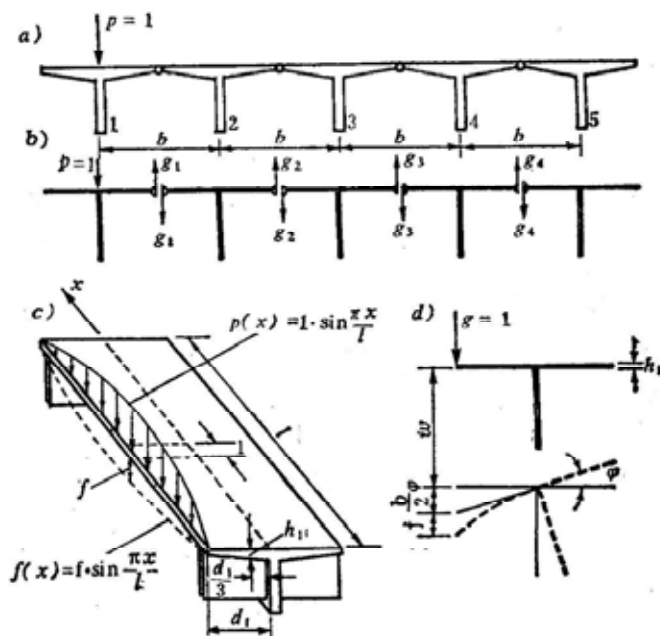


图 4.19 铰接 T 形梁桥计算图式

将改变后的  $\delta_{ii}$  代入式(4.30) 并经与铰接板的类似处理后, 就得铰接T梁的正则方程:

$$\begin{aligned} 2(1+\gamma+\beta)g_1 - (1-\gamma)g_2 &= 1 \\ -(1-\gamma)g_1 + 2(1+\gamma+\beta)g_2 - (1-\gamma)g_3 &= 0 \\ -(1-\gamma)g_2 + 2(1+\gamma+\beta)g_3 - (1-\gamma)g_4 &= 0 \\ -(1-\gamma)g_3 + 2(1+\gamma+\beta)g_4 &= 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

由此可见, 只要确定了刚度参数  $\gamma$  和  $\beta$ , 就可象在铰接板桥中一样, 解出所有未知铰接力的峰值, 并利用  $\eta_{ki}=p_{ik}$  的关系(参见式 4.33)绘制荷载横向影响线。

值得指出的是, 当悬臂不长(在 0.7~0.8m 左右)和跨度  $l \geq 10m$  时参数  $\gamma$  一般比  $\beta$  显著要大( $\frac{\beta}{1+\gamma} < 5\%$ ), 因而在不影响计算精确度的条件, 可忽略  $\beta$  的影响而直接利用铰接桥

板的计算用表(附录 D)以简化铰接梁桥的计算。

在必要计入  $\beta$  的影响时, 也可利用  $\beta=0$  时的  $\eta_{ii}$  和  $\eta_{ik}$  计算用表, 按下式近似地计算计及  $\beta$  值影响的荷载横向影响线坐标值  $\eta_{ii(\beta)}$  和  $\eta_{ik(\beta)}$ :

$$\begin{aligned} \eta_{ii(\beta)} &= \eta_{ii} + \frac{\beta}{1+\gamma}(1-\eta_{ii}) \\ \eta_{ik(\beta)} &= \eta_{ik} + \frac{\beta}{1+\gamma}\eta_{ik} \end{aligned} \quad (4.46)$$

#### (6)计算举例

##### 1)铰接板桥举例

例 4.4: 图 4.20a 所示为跨径  $l=12.60m$  的铰接空心板桥的横截面布置, 桥面净空为净一 7 和  $2 \times 0.75m$  人行道。全桥由 9 块预应力混凝土空心板组成, 欲求 1、3 和 5 号板汽车和人群荷载作用的跨中荷载横向分布系数。

解:

##### ①计算空心板截面的抗弯惯矩 I

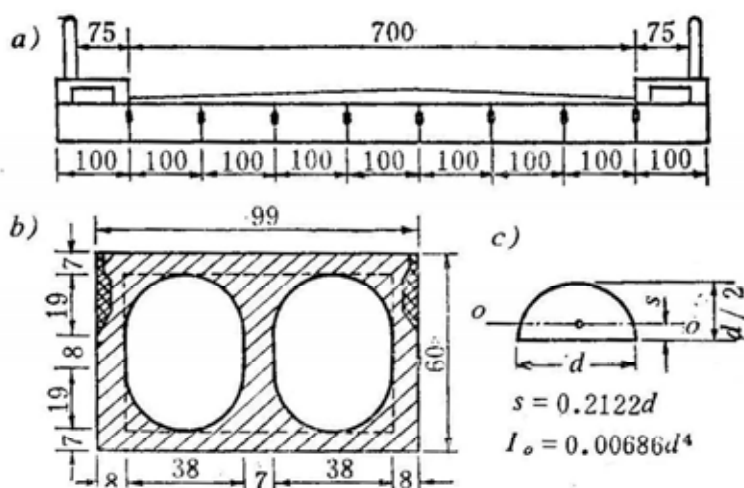


图 4.20 空心板桥横截面

本例空心板是上下对称截面，形心轴位于高度中央，故其抗弯惯矩为（参见图 4.20c 所示半圆的几何性质）：

$$I = \frac{99 \times 60^3}{12} - 2 \times \frac{38 \times 8^3}{12} - 4 \times [0.00686 \times 38^4 + \frac{1}{2} \times \frac{\pi \times 38^2}{4} (\frac{8}{2} + 0.2122 \times 38)^2]$$

$$= 1782000 - 3243 - 4 \times 96828 = 1391 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

②计算空心板截面的抗扭惯矩  $I_T$

本例空心板截面可简化为图 4.20b 中虚线所示薄壁箱形截面来计算  $I_T$ ，按前面式 (4.43)，则得：

$$I_T = (91 + 91)^2 \times 53^2 \frac{1}{2 \times \frac{53}{8} + \frac{91}{7} + \frac{91}{7}} = \frac{93045000}{13.25 + 26} = 2.37 \times 10^6 \text{ cm}^4$$

③计算刚度参数  $\gamma$

$$\gamma = 5.8 \frac{I}{I_T} \left(\frac{b}{l}\right)^2 = 5.8 \frac{1391 \times 10^3}{2370 \times 10^3} \left(\frac{100}{1260}\right)^2 = 0.0214$$

④计算跨中荷载横向分布影响线

从铰接板荷载横向分布影响线计算用表(附录I)中所属 9-1、9-3 和 9-5 的分表，在  $\gamma = 0.02$  与  $0.04$  之间按直线内插法求得  $\gamma = 0.0214$  的影响线竖坐标值  $\eta_{1i}$ 、 $\eta_{3i}$  和  $\eta_{5i}$ 。计算见表 4.2（表中的数值为实际  $\eta_{ki}$  的小数点后三位数字）。

将表中  $\eta_{1i}$ 、 $\eta_{3i}$  和  $\eta_{5i}$  之值按一定比例尺，绘于各板号的曲线下方。连接成光滑曲线后，就得到 1 号、3 号和 5 号板的荷载横向分布影响线，如图 4.21b、c 和 d 所示。

⑤计算荷载横向分布系数

按《桥规》规定沿横向确定最不利荷载位置后，就可以计算跨中荷载横向分布系数如下：对于 1 号板：

$$\text{汽车荷载} \quad m_{cq} = \frac{1}{2} (0.197 + 0.119 + 0.086 + 0.056) = 0.229$$

表 4.2 荷载横向分布影响线竖标计算表

板号	$\eta$	单位荷载作用位置 (i 号板中心)									$\sum \eta_{ki}$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0.02	236	194	147	113	088	070	057	049	046	$\approx 1000$
	0.04	306	232	155	104	070	048	035	026	023	
	0.0214	241	197	148	112	087	068	055	047	044	
3	0.02	147	160	164	141	110	087	072	062	057	$\approx 1000$
	0.04	155	181	195	159	108	074	053	040	035	
	0.0214	148	161	166	142	110	086	071	060	055	
5	0.02	088	095	110	134	148	134	110	095	088	$\approx 1000$
	0.04	070	082	108	151	178	151	108	082	070	
	0.0214	087	094	110	135	150	135	110	094	087	

人群荷载  $m_{cr} = 0.235 + 0.044 = 0.279$

对于 3 号板:

汽车荷载  $m_{cq} = \frac{1}{2}(0.161 + 0.147 + 0.108 + 0.073) = 0.245$

人群荷载  $m_{cr} = 0.150 + 0.055 = 0.205$

对于 5 号板:

汽车荷载  $m_{cq} = \frac{1}{2}(0.103 + 0.140 + 0.140 + 0.103) = 0.243$

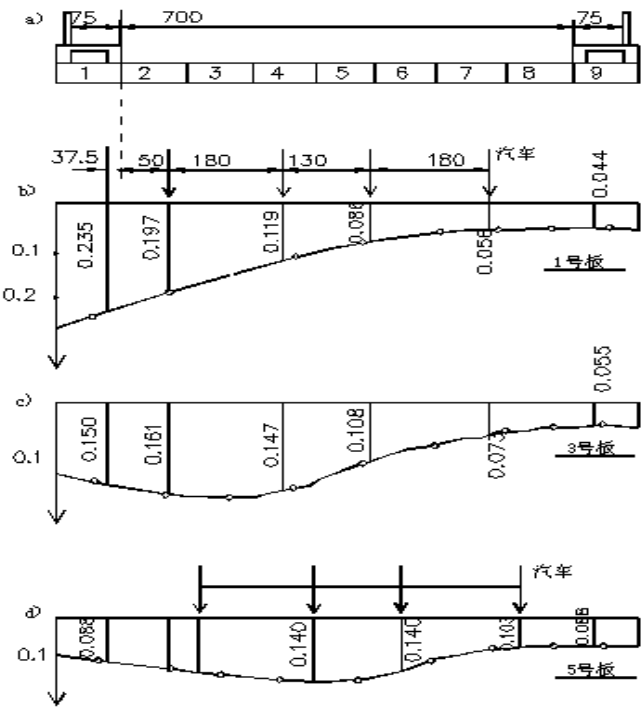


图 4.21 1、3 和 5 号板的荷载横向分布影响线

人群荷载  $m_{cr} = 0.088 + 0.088 = 0.176$

综上所述，汽车荷载横向分布系数的最大值为  $m_{cq} = 0.245$ ，人群荷载的为

$m_{cr} = 0.279$ 。在设计中通常偏安全地取这些最大值来计算内力。

从图 4.21 所作各板的横向分布影响线可以看出，鉴于铰接空心板或实心板的抗扭能力比较大，故影响线竖标值在横桥方向还是比较均匀的。再考虑到通常在桥宽方向较大范围内要布置好多个车轮荷载，这样又导致各号板的受力比较均匀，因此通过计算分析，我们还可以归纳成下述近似公式作为初估车辆荷载横向分布系数之用。

$$m_c = C \cdot \frac{k}{n}$$

式中： $n$ ——横截面内板的块数，

$k$ ——车辆荷载列数；

$C$ ——修正系数，对于汽车荷载=1.15。

## 2) 铰接 T 形梁桥举例

例 4.5：无中横隔梁的横向铰接 T 形梁桥，跨径  $l=10.0\text{m}$ ，桥面净空为净—7 附  $2 \times 0.25\text{m}$  护轮带，由间距  $b=1.5\text{m}$  的 5 根主梁组成。主梁的截面尺寸如图 4.22 所示。试计

算各主梁的汽车荷载横向分布系数。

解：

### ① 计算截面特性

主梁翼板的平均厚度为  $12\text{cm}$ ，则截面形心距翼板顶面的距离  $e$  为：

$$e = \frac{16 \times 70 \times \frac{70}{2} + (150 - 16) \times 12 \times \frac{12}{2}}{16 \times 70 + (150 - 16) \times 12}$$

$$= 17.91\text{cm}$$

抗弯惯矩为

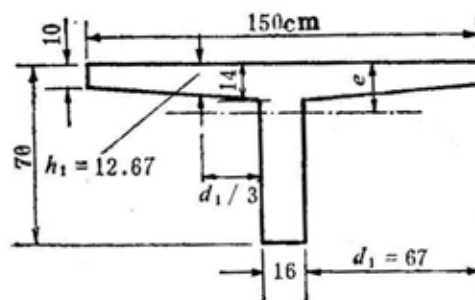


图 4.22 T 形梁截面尺寸

$$I = \frac{1}{12} \times 16 \times 70^3 + (16 \times 17) \left( \frac{70}{2} - 17.91 \right)^2 + \frac{1}{12} (150 - 16) \times 12^3 + (150 - 16) \times 12 \times \left( 17.91 - \frac{12}{2} \right)^2 = 1031800\text{cm}^4$$

由式(4.27)和表 4.1 计算抗扭惯矩  $I_T$ 。对于翼板， $\frac{t_1}{b_1} = \frac{12}{150} < 0.1$ ，可得  $c_1 = \frac{1}{3}$ ；对于

梁肋， $\frac{t_2}{b_2} = \frac{16}{(70-12)} = 0.276$ ，可得  $c_2 = 0.275$ 。抗扭惯矩为：

$$I_T = \sum c_i b_i t_i^3 = \frac{1}{3} \times 150 \times 12^3 + 0.275 \times 58 \times 16^3 = 86400 + 65330 = 151700\text{cm}^4$$

②求刚度参数  $\gamma$  和  $\beta$

$$\gamma = 5.8 \frac{I}{I_T} \left( \frac{b}{l} \right)^2 = 5.8 \times \frac{1031800}{151700} \times \left( \frac{150}{1000} \right)^2 = 0.8880$$

$$\beta = 390 \frac{I}{l^4} \left( \frac{d_1}{h_1} \right)^3 = 390 \times \frac{1031800}{1000^4} \left( \frac{67}{12.67} \right)^3 = 0.0595$$

$$\frac{\beta}{1+\gamma} = \frac{0.0595}{1+0.8880} = 0.0315$$

由计算结果可见,  $\beta$  值对正则方程 (4.45) 的系数的影响只有 3% 左右, 因此可以忽略不计。

③绘制跨中荷载横向分布影响线

从附录 I 中所属 5-1、5-2 和 5-3 的分表, 在  $\gamma = 0.60$  与  $\gamma = 1.00$  之间内插求  $\gamma = 0.888$

的影响线竖标值  $\eta_{1i}$ 、 $\eta_{2i}$  和  $\eta_{3i}$ , 并绘成各梁的荷载横向分布影响线如图 4.23b、c 和 d。

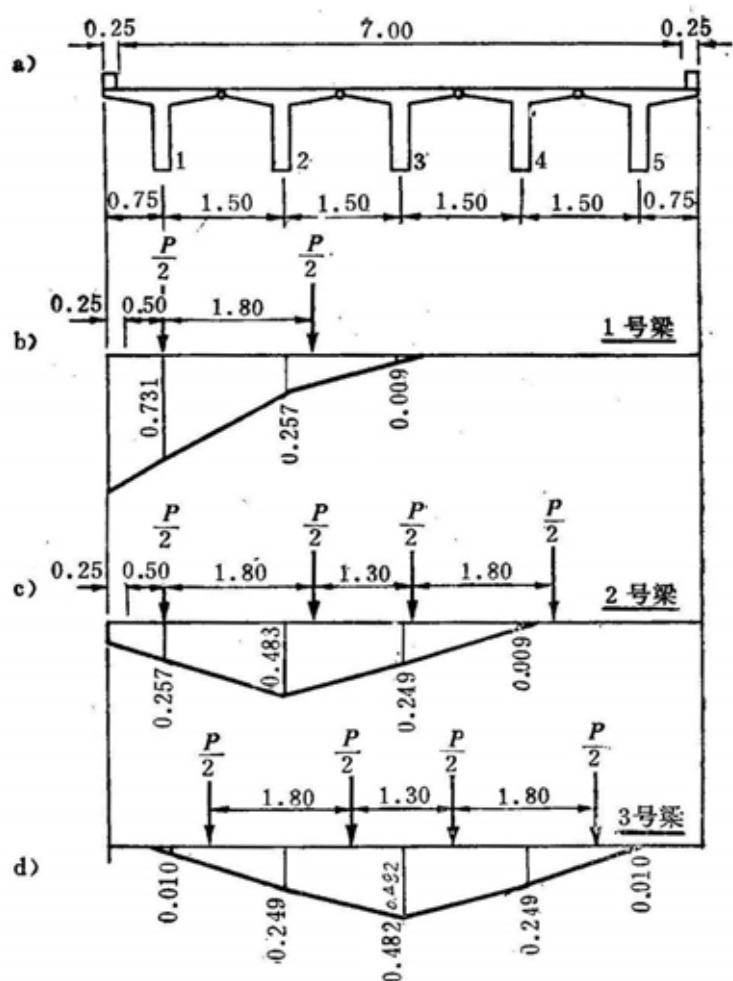


图 4.23 1、2 和 3 号梁的荷载横向影响线

#### ④计算各主梁的荷载横向分布系数

汽车荷载的横向最不利布置如图 4.23 中所示, 则得各主梁的横向分布系数为:

$$1 \text{ 号梁: } m_{cq} = \frac{1}{2}(0.731 + 0.216) = 0.474$$

$$2 \text{ 号梁: } m_{cq} = \frac{1}{2}(0.257 + 0.440 + 0.248 + 0) = 0.473$$

$$3 \text{ 号梁: } m_{cq} = \frac{1}{2}(0.384 + 0.100) \times 2 = 0.484$$

计算结果表明, 中间主梁对汽车荷载的横向分布系数比边主梁的要稍大一些, 而且各主梁的横向分布系数均较接近。

#### 4. 刚接梁法计算特点

对于翼缘板刚性连结的肋梁桥, 只要在铰接板(梁)桥计算理论的基础上, 在接缝处补充引入赘余弯矩 $m_i$ , 就可建立计及横向刚性连结特点的赘余力正则方程。用这一方法来求解各梁荷载横向分布的问题, 就称为刚接梁法。

图 4.24a 表示翼缘板刚性连结的 T 形简支梁桥的跨中横截面。与图 4.19a 一样, 设有单位正弦荷载  $p(x) = 1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l}$  作用在 1 号梁的轴线上。在各板跨中央沿纵缝将板切开, 并代以按正弦分布的赘余力素  $x_i \sin \frac{\pi x}{l}$  (这里  $i=1, 2$  和  $3$  表示剪力,  $i=4, 5$  和  $6$  表示弯矩), 式中  $x_i$  均为赘余力素在梁的跨中截面处的峰值, 就得到计算刚接梁桥的基本体系, 如图 4.24b 所示。

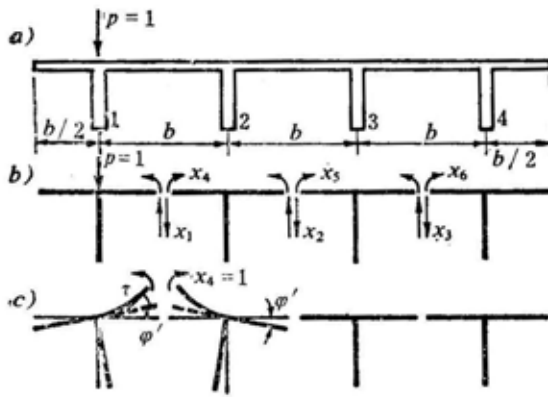


图 4.24 刚接梁桥计算图式

$\delta_{ip}$ ——外荷载在  $i$  处引起的相对变位;

$x_j$ —— $j$  处赘余力素的峰值。

下面我们按照图 4.24 b 的计算图式来具体分析一下  $\delta_{ij}$  和  $\delta_{ip}$  的赋值。

不难看出, 在系数矩阵  $[\delta_{ij}]$  中, 对于仅涉及赘余剪力  $x_1, x_2, x_3$  和相应竖向位移的系数, 与前面铰接 T 形梁桥的完全一样, 即:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 2 \left( w + \frac{b}{2} \varphi + f \right)$$

$$\delta_{12} = \delta_{23} = \delta_{21} = \delta_{32} = - \left( w - \frac{b}{2} \varphi \right)$$

根据熟知的力法原理, 就可得到求解所有赘余力素的一般正则方程式, 用矩阵形式可简明表示为:

$$[\delta_{ij}] \{x_j\} + \{\delta_{ip}\} = 0$$

( $i$  或  $j=1, 2, 3 \dots 6$ ) (4.47)

式中:  $[\delta_{ij}]$ ——正则方程中位于赘余力素前的计算系数, 它表示赘余力素峰值  $x_j=1$  时在  $i$  处引起的相对变位 (包括  $i=j$  和  $i \neq j$  的情形);



$$\delta_{13} = \delta_{31} = 0$$

对于仅涉及赘余弯矩 $x_4$ 、 $x_5$ 、 $x_6$ 和相应转角的系数，由图 4.24c可得：

$$\delta_{44} = \delta_{55} = \delta_{66} = 2(\varphi' + \tau)$$

$$\delta_{45} = \delta_{56} = \delta_{54} = \delta_{65} = -\varphi'$$

$$\delta_{46} = \delta_{64} = 0$$

由于对称弯矩 $x_i=1(i=4、5 和 6)$ 作用下接缝两侧不产生相对挠度以及各切缝两侧的剪切位移不引起相对转角，故有：

$$\delta_{14} = \delta_{25} = \delta_{36} = \delta_{41} = \delta_{52} = \delta_{63} = 0$$

此外，还可写出：

$$\delta_{34} = \delta_{16} = \delta_{43} = \delta_{61} = 0$$

$$\delta_{15} = \delta_{26} = \delta_{51} = \delta_{62} = \varphi' \frac{b}{2}$$

$$\delta_{24} = \delta_{35} = \delta_{42} = \delta_{53} = -\varphi' \frac{b}{2}$$

当单位正弦荷载作用于 1 号梁轴线上时(作用于其他梁上时，可类似处理)，可得荷载系数：

$$\delta_{1p} = -w$$

$$\delta_{2p} = \delta_{3p} = \delta_{4p} = \delta_{5p} = \delta_{6p} = 0$$

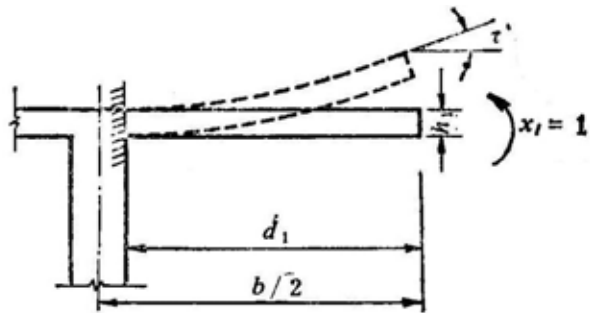
图 4.24b中表示了所有正向的赘余力素 $x_i$ ，在变位系数的计算中，接缝任一侧产生与力素正向相一致的变位时取正值，反之取负值。

系数中涉及的 $\varphi'$ 和 $\tau$ 分别为缝端单位弯矩作用所引起的主梁扭角和翼板局部挠曲角。由图 4.25 可知：

$$\tau = \frac{1 \cdot d_1}{EI_1} = \frac{12d_1}{Eh_1^3}$$

参见图 4.14 可得： $\frac{m_T}{\varphi} = \frac{x_i}{\varphi'}$ ，

$$\therefore \varphi' = \varphi \cdot \frac{x_i}{m_T} = \varphi \cdot \frac{1}{b/2} = \varphi \cdot \frac{2}{b}$$



式中 $\varphi$ 为缝端单位竖剪力引起主梁扭角，

图 4.25 局部挠曲计算图式

可按式(4.39)计算。由上述分析可得， $[\delta_{ij}]$ 中的许多元素为零，实际可表示为：

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & 0 & 0 & \delta_{15} & 0 \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} & 0 & \delta_{26} \\ 0 & \delta_{32} & \delta_{33} & 0 & \delta_{35} & 0 \\ 0 & \delta_{42} & 0 & \delta_{44} & \delta_{45} & 0 \\ \delta_{51} & 0 & \delta_{53} & \delta_{54} & \delta_{55} & \delta_{56} \\ 0 & \delta_{62} & 0 & 0 & \delta_{65} & \delta_{66} \end{bmatrix}$$

如将  $\delta_{ij}$  和  $\delta_{ip}$  都除以  $w$ , 将式(4.47)中下部三个方程各乘以  $\frac{b}{2}$ , 并令和  $g_1 = x_1$ ,  $g_2 = x_2$ ,

$g_3 = x_3$  和  $m_1 = \frac{2}{b}x_4$ ,  $m_2 = \frac{2}{b}x_5$ ,  $m_3 = \frac{2}{b}x_6$ , 最后可得赘余力素  $g_i$  和  $m_i$  的正则方程为:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} \delta_g & r-1 & 0 & 0 & r & 0 \\ r-1 & \delta_g & r-1 & -r & 0 & r \\ 0 & r-1 & \delta_g & 0 & -r & 0 \\ \hline 0 & -r & 0 & \delta_m & -r & 0 \\ r & 0 & -r & -r & \delta_m & -r \\ 0 & r & 0 & 0 & -r & \delta_m \end{array} \right] \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.48)$$

式中:  $\delta_g = 2(1 + \gamma + \beta)$ , 与铰接 T 形梁桥相同

$$\delta_m = 2(\gamma + 3\beta')$$

$$\beta' = \left( \frac{b}{2d_1} \right)^2 \cdot \beta \quad (4.49)$$

式(4.48)中包含  $\gamma$ 、 $\beta$  和  $\beta'$  三个参数, 其中  $\gamma$  和  $\beta$  与铰接梁桥的相同, 对于 T 形梁和 I 字形梁也可近似地认为  $\beta \approx \beta'$ , 这样可减少参数数目, 使编制计算表格得以简化。

竖向荷载的横向分布, 与前面铰接梁桥一样, 仍只考虑剪力  $g_i$  的影响。因此, 由式(4.48)求得  $g_i$  后, 就可按式(4.33)编制荷载横向分布影响线坐标  $\eta_{ik}$  的计算表格。

以上介绍了无横隔梁的刚接梁桥计算, 当有中间横隔梁时, 可以近似地把横隔梁与实有的桥面板一起化成等刚度的虚拟桥面板来计算。有关刚接梁法的详细阐述和计算表格可参阅同济大学路桥教研室编《公路桥梁荷载横向分布计算》一书。

## 5. 荷载横向分布系数沿桥跨变化

一般来说, 荷载在桥跨纵向的位置不同, 对某一主梁产生的横向分布系数不一定相同。按照实用计算方法基本原理, 若精确内力影响面的图形在纵横向各自有相似的特征, 则跨中各点荷载横向分布系数采用相同的值, 否则荷载横向分布系数沿桥跨应采用不同值。在实际应用中, 当求简支梁弯矩时, 鉴于横向分布系数沿跨内部分的变化不大, 为了简化起见, 通常均可按不变化的  $m_c$  来计算。此处  $m_c$  为采用其他非杠杆原理法的方法计算的荷载横向分布系数。

图 4.26 为边梁支点截面剪力影响面。由图中可见, 影响面纵横向完全异形, 无法作变量分离, 不能得出一个简化的在全跨单一的荷载横向分布系数。目前在设计实践中, 当计算

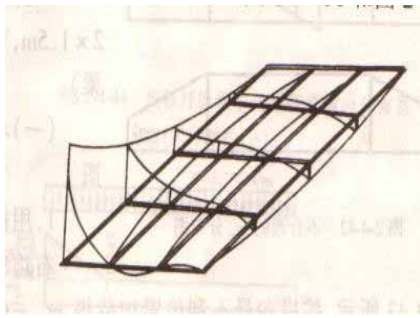


图 4.26 边梁支点截面剪力影响面

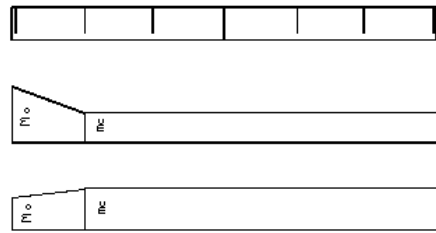


图 4.27 计算剪力时荷载横向分布系数沿跨长分布图

支点截面剪力时，采用下面的荷载横向分布系数近似计算方法：

对于有多根内横隔梁的情况，梁端采用按杠杆原理法计算得到的荷载横向分布系数 $m_0$ ，从第一根内横隔梁起则近似采用按其他方法计算得到的荷载横向分布系数 $m_c$ ，从梁端到第一根内横隔梁之间采用从 $m_0$ 到 $m_c$ 的直线过渡形式（见图 4.27）。

对于无中间横隔梁或仅有一根中横隔梁的情况，荷载横向分布系数也采用图 4.27 的变化规律，但荷载横向分布系数变化点改为离支点 $\frac{l}{4}$ 处。

这样，主梁上的活载因其纵向位置不同，就应有不同的横向分布系数。图 4.27 中 $m_0$ 可能大于也可能小于 $m_c$ 。

对于主梁其它截面的剪力，也可视具体情况计及  $m$  沿桥跨变化的影响。

### 4.2.3 主梁内力计算

根据作用于一片主梁的恒载和通过横向分布系数求得的计算活载,就可计算主梁的截面内力(弯矩  $M$  和剪力  $Q$ )。有了截面内力,就可以按钢筋混凝土和预应力混凝土结构的计算原理进行主梁各截面的配筋设计或验算。

对于一般小跨径的简支梁,通常只需计算跨中截面的最大弯矩和支点截面及跨中截面的剪力。跨中与支点之间各截面的剪力可以近似地按直线规律变化,弯矩可假设按二次抛物线

规律变化,即:

$$M_x = \frac{4M_{\max}}{l^2} x(l-x)$$

式中:  $M_x$  ——主梁在离支点  $x$  处任一截面的弯矩值;

$M_{\max}$  ——主梁跨中最大弯矩设计值;

$l$  ——主梁的计算跨径。

对于较大跨径的简支梁,一般还应计算跨径四分之一截面的弯矩和剪力。如果主梁沿桥轴方向截面有变化,例如梁肋宽度或梁高变化,则还应计算截面变化处的内力。

#### 1. 恒载内力计算

主梁横截面内力,包括主梁自重(前期恒载)引起的主梁自重内力和后期恒载引起(如桥面铺装、人行道、栏杆、灯柱等)引起的主梁后期恒载内力,总称为主梁恒载内力。钢筋混凝土或预应力混凝土公路桥梁的恒载效应,往往占总作用效应很大的比重,梁的跨径越大,恒载所占的比重也越大。因此,设计时应正确地确定作用于梁上的计算恒载。

### (1)计算方法

在计算恒载时，为了简化起见，习惯上往往将沿桥跨分点作用的横隔梁重量、沿桥横向不等分布的铺装层重量以及作用于两侧的人行道和栏杆等重量均匀分布地分摊给各主梁承受。因此，对于等截面梁桥的主梁，其计算恒载是简单的均布荷载。为了更精确起见，也可根据施工安装的情况，将人行道、栏杆、灯柱和管道等重量象活载计算那样，按荷载横向分布的规律进行分配。

对于组合式梁桥，应按实际施工组合的情况，分阶段计算其恒载内力。例如，先按预制主梁、微弯板和现浇桥面板的重量计算仅由预制主梁承受的第一阶段恒载内力，再按桥面铺装，人行道、栏杆等重量计算由梁面板和预制主梁结合而成的组合梁所承受的第二阶段恒载内力。

对于预应力混凝土简支梁桥，在施加预应力阶段，往往要利用梁体自重来抵消强大钢丝束张拉力在梁体上翼缘产生的拉应力。在此情况下，也要将恒载分成两个阶段(即先期恒载和后期恒载)来进行分析。在特殊情况下，恒载可能要分成更多的阶段来考虑。

确定了计算恒载集度 $g$ 之后，就可按一般《材料力学》公式计算出梁内各截面的弯矩 $M$ 和剪力 $Q$ 。当恒载分阶段计算时，应按各阶段的计算恒载 $g_i$ 来计算内力，以便进行内力或应力组合。

### (2)计算举例

例 4.6: 求如图 4.28 所示五梁式装配式钢筋混凝土简支梁桥主梁的恒载内力。图a和b分别为主梁横截面和横隔梁布置图。已知计算跨径 $l=19.5\text{m}$ ，每侧栏杆及人行道重量作用力为 $5\text{KN/m}$ ，钢筋混凝土、沥青混凝土和混凝土的重力密度分别为  $25\text{KN/m}^3$ 、 $23\text{KN/m}^3$ 和  $24\text{KN/m}^3$ 。

解:

#### ①恒载集度

主梁: 
$$g_1 = [0.18 \times 1.30 + (\frac{0.08 + 0.14}{2})(1.60 - 0.18)] \times 25 = 9.76 \text{KN/m}$$

横隔梁:

对于边主梁: 
$$g_2 = \{ [1.00 - (\frac{0.08 + 0.14}{2})] \times (\frac{1.60 - 0.18}{2}) \times 0.15 \times 5 \times 25 \} / 19.50$$
$$= 0.61 \text{KN/m}$$

对于中主梁: 
$$g_2^1 = 2 \times 0.61 = 1.22 \text{KN/m}$$

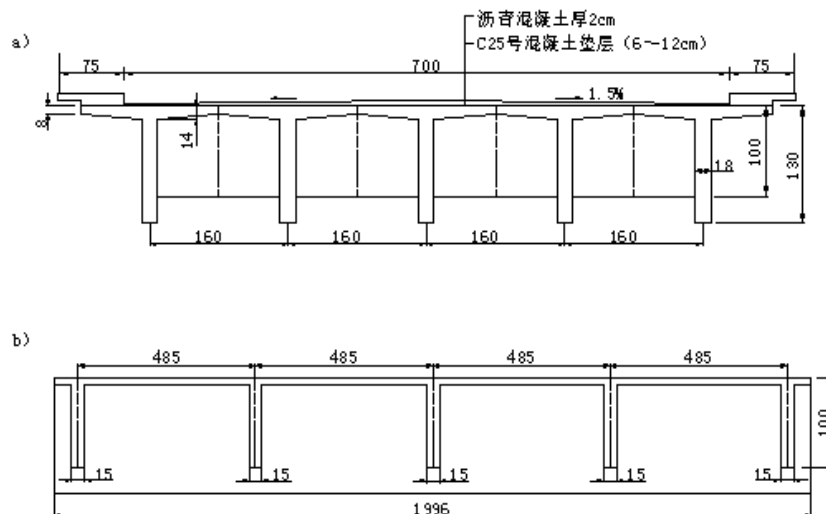


图 4.28 主梁及横隔梁布置图（尺寸单位：cm）

$$\begin{aligned} \text{桥面铺装层: } g_3 &= [0.02 \times 7.00 \times 23 + \frac{1}{2} (0.06 + 0.12) \times 7.00 \times 24] / 5 \\ &= 3.70 \text{ KN/m} \end{aligned}$$

$$\text{栏杆和人行道: } g_4 = 5 \times 2 / 5 = 2.00 \text{ KN/m}$$

作用于边主梁的全部恒载  $g$  为:

$$g = \sum g_i = 9.76 + 0.61 + 3.71 + 2.00 = 16.07 \text{ KN/m}$$

作用于中主梁的恒载为;

$$g^1 = 9.76 + 1.22 + 3.70 + 2.00 = 16.68 \text{ KN/m}$$

## ②荷载内力

计算边主梁距离支座为  $x$  的横截面弯矩和剪力:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{gl}{2} \cdot x - gx \cdot \frac{x}{2} = \frac{gx}{2} (l - x) \\ Q_x &= \frac{gl}{2} - gx = \frac{g}{2} (l - 2x) \end{aligned}$$

各计算截面的剪力和弯矩值列于表 4.4 内。

表 4.4 边主梁的恒载内力

内力 截面位置	剪力 $Q$ KN	弯矩 $M$ KN·m
$x=0$	$Q=157.0$	$M=0$
$x=l/4$	$Q=16.07(19.5-2 \times 19.5/4)/2=78.4$	$M=\frac{16.07}{2} \times \frac{19.5}{4} (19.5 - \frac{19.5}{4})=573.2$
$x=l/2$	$Q=0$	$M=19.5^2 \times 16.07/8=761.3$

## 2. 活载内力计算

主梁活载内力是由可变作用中车道荷载、人群荷载产生的。当求得了活载的横向分布系数后,就可以具体确定作用于一根主梁上的荷载数值,然后就可利用工程力学方法来计算活载内力。

### (1)计算方法

主梁活载内力计算分为两步:第一步求某主梁的最不利荷载横向分布系数 $m_i$ ;第二步应用主梁内力影响线,给荷载乘以横向分布系数后计算截面活载内力。对于车道荷载应将其均布和集中荷载引起的内力进行叠加求出总效应。对于人群荷载内力计算方法同车道均布荷载,但不计冲击力影响。

均布荷载:

$$S_{qk} = (1 + \mu) \cdot \xi \cdot m_i \cdot q_k \cdot \Omega \quad (4.50)$$

集中荷载:

$$S_{pk} = (1 + \mu) \cdot \xi \cdot m_i \cdot p_k \cdot y_k \quad (4.51)$$

车道荷载总效应：

$$S = S_{qk} + S_{pk} = (1 + \mu) \cdot \xi \cdot m_i \cdot (q_k \cdot \Omega + p_k \cdot y_k) \quad (4.52)$$

式中：  $S_{qk}$  ——主梁在车道荷载的均布荷载作用下的内力；

$S_{pk}$  ——主梁在车道荷载的集中荷载作用下的内力；

$\mu$  ——汽车荷载的冲击系数，按规定取值；

$\xi$  ——多车道横向折减系数，规范规定，多车道桥梁的汽车荷载应考虑折减，当桥涵设计车道数等于或大于 2 时，由汽车荷载产生的效应应按规定的多车道横向折减系数进行折减，但折减后的效应不得小于两条设计车道的荷载效应。

$m_i$  ——荷载横向分布系数，计算主梁弯矩可用跨中荷载横向分布系数  $m_c$  代替全

跨各点上的  $m_i$ ，在计算主梁剪力时，应考虑  $m_i$  在跨内的变化。

$q_k$  ——车道荷载的均布荷载；

$p_k$  ——车道荷载的集中荷载；

$\Omega$  ——相应的主梁内力影响线的面积；

$y_k$  ——对应于车道集中荷载的影响线最大竖标值。

在求汽车荷载中车道均布荷载及人群荷载作用下的主梁支点或靠近支点截面的剪力时，荷载横向分布系数在这一区段内是变化的，如图 4.29，以支点截面为例，其计算公式为：

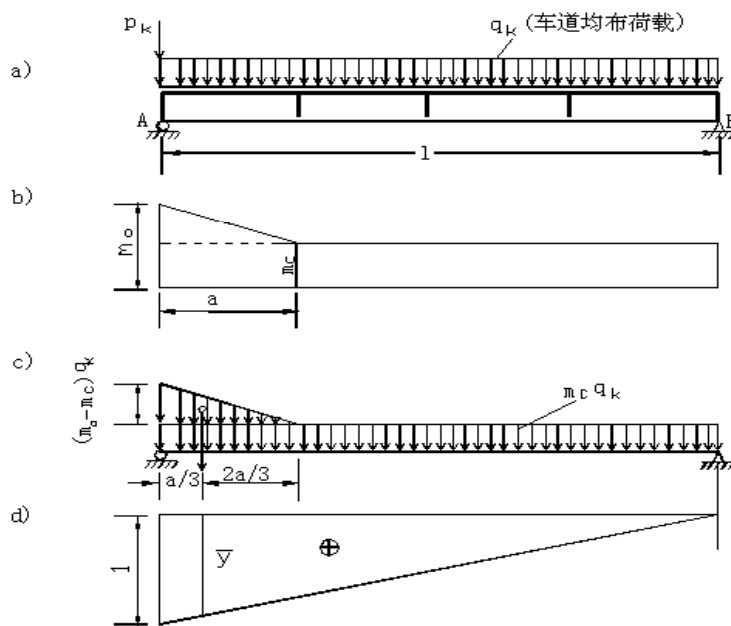


图 4.29 车道均布荷载支点剪力计算图

$$Q_A = Q_A' + \Delta Q \quad (4.53)$$

式中：  $Q_A'$  ——由式（4.52）按不变的  $m_c$  计算的内力值；

$\Delta Q_A$  ——计及靠近支点处横向分布系数变化而引起的内力增（或减）值。其值计算方法如下：

$$\Delta Q_A = (1 + \mu) \cdot \xi \cdot \left[ \frac{a}{2} (m_0 - m_c) q_k \cdot \bar{y} + (m_0 - m_c) P_k \right] \quad (4.54)$$

式中：  $\bar{y}$  ——对应于附加三角形荷载重心位置的内力影响线坐标值（见图 4.29）。

在上述计算中，当  $m_0 < m_c$  时  $\Delta Q_A$  为负值，这意味着剪力反而减小了。

## (2) 计算举例

例 4.7：如图 4.28 所示五梁式装配钢筋混凝土简支梁桥，计算跨径  $l=19.50m$ ，主梁翼板刚性连结。计算边主梁在公路—Ⅱ级车道荷载和人群荷载标准值  $p_r = 3.0kN/m^2$  作用下的跨中最大弯矩和最大剪力以及支点截面的最大剪力。汽车冲击系数为  $\mu = 0.18$ ，荷载横向分布系数可按下表中的值选取。

解：

公路—Ⅱ级车道荷载标准值为：

均布荷载  $q_k = 0.75 \times 10.5 = 7.875kN/m$

梁号	荷载位置	汽车荷载	人群荷载
边主梁	跨中 $m_c$	0.504	0.620
	支点 $m_s$	0.438	1.422

计算弯矩时的集中荷载  $P_k = 0.75 \times \left[ 180 + \frac{19.5 - 5}{50 - 5} \times (360 - 180) \right] = 178.5kN$

计算剪力时的集中荷载  $P_k = 1.2 \times 178.5 = 214.2 \text{ kN}$

①计算车道荷载的跨中弯矩

双车道不折减:  $\xi = 1.00$

车道均布荷载作用下:

$$\Omega = \frac{1}{8} l^2 = \frac{1}{8} \times 19.5^2 = 47.53 \text{ m}^2$$

故得:  $M_{\frac{l}{2}, qk} = (1 + \mu) \cdot \xi \cdot m_i \cdot q_k \cdot \Omega = (1 + 0.18) \times 1.00 \times 0.504 \times 7.875 \times 47.53$

$$= 222.6 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

车道集中荷载作用下:

$$M_{\frac{l}{2}, pk} = (1 + \mu) \cdot \xi \cdot m_i \cdot p_k \cdot y_k = (1 + 0.18) \times 1.00 \times 0.504 \times 178.5 \times \frac{19.5}{4}$$

$$= 517.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{\frac{l}{2}} = M_{\frac{l}{2}, qk} + M_{\frac{l}{2}, pk} = 222.6 + 517.5 = 740.1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

②计算人群荷载的跨中弯矩

纵向每延米人群荷载集度  $P_{0r} = 3.0 \times 0.75 = 2.25 \text{ kN/m}$

$$M_{\frac{l}{2}, r} = m_{cr} \cdot P_{0r} \cdot \Omega = 0.620 \times 2.25 \times 47.53 = 66.3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

③计算跨中截面车道荷载最大剪力

鉴于跨中剪力  $Q_l$  影响线的较大坐标

位于跨中部分 (见图 4.30), 故也采用全跨统一的荷载横向分布系数  $m_c$  来计算。

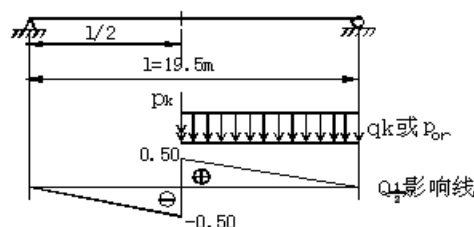


图 4.30 跨中剪力计算图式

$$\Omega = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 19.5 \times 0.5 = 2.438 \text{ m}^2$$

车道均布荷载作用下:

$$Q_{\frac{l}{2}, qk} = (1 + \mu) \cdot \xi \cdot m_i \cdot q_k \cdot \Omega = (1 + 0.18) \times 1.00 \times 0.504 \times 7.875 \times 2.438$$

$$= 11.4 \text{ kN}$$

车道集中荷载作用下:

$$Q_{\frac{l}{2}, pk} = (1 + \mu) \cdot \xi \cdot m_i \cdot p_k \cdot y_k = (1 + 0.18) \times 1.00 \times 0.504 \times 214.2 \times 0.50$$

$$= 63.7 \text{ kN}$$

$$Q_{\frac{l}{2}} = Q_{\frac{l}{2}, qk} + Q_{\frac{l}{2}, pk} = 11.4 + 63.7 = 75.1 \text{ kN}$$

④计算跨中截面人群荷载最大剪力



$$Q_{\frac{l}{2},r} = m_c \cdot P_{or} \cdot \Omega = 0.620 \times 2.25 \times 2.438 = 3.40 \text{ kN}$$

⑤计算支点截面汽车荷载最大剪力

作荷载横向分布系数沿桥跨方向的变化图形和支点剪力影响线如图 4.31a、b 和 c 所示。

$$\text{横向分布系数变化区段的长度 } a = \frac{1}{2} \times 19.5 - 4.85 = 4.9 \text{ m}$$

$$\text{影响线面积 } \Omega = \frac{1}{2} \times 19.5 \times 1 = 9.75 \text{ m}$$

车道均布荷载作用下 ( $m = m_c$  时)：

$$\begin{aligned} Q'_{0,qk} &= (1 + \mu) \cdot \xi \cdot m_c \cdot q_k \cdot \Omega = (1 + 0.18) \times 1.00 \times 0.504 \times 7.875 \times 9.75 \\ &= 45.7 \text{ kN} \end{aligned}$$

附加三角形荷载重心的影响线坐标为：

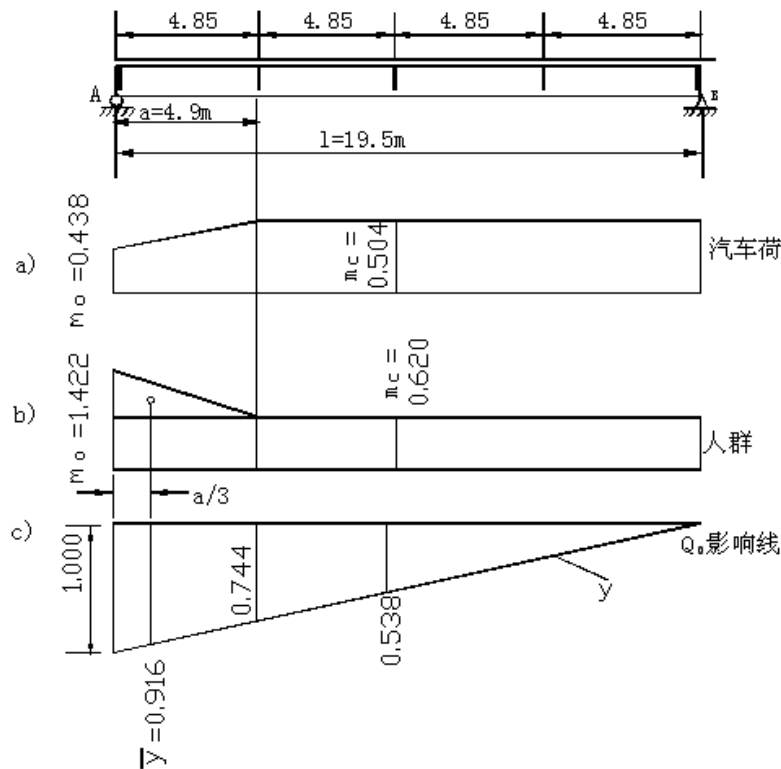


图 4.31 支点剪力计算图式

$$\bar{y} = 1 \times (19.5 - \frac{1}{3} \times 4.9) / 19.5 = 0.916$$

附加车道均布荷载剪力为：

$$\begin{aligned} \Delta Q_{0,qk} &= \frac{a}{2} (m_0 - m_c) q_k \cdot \bar{y} = \frac{4.9}{2} \times (0.438 - 0.504) \times 7.875 \times 0.916 \\ &= -1.2 \text{ kN} \end{aligned}$$

故车道均布荷载作用下的支点剪力为：

$$Q_{0,qk} = Q'_{0,qk} + \Delta Q_{0,qk} = 45.7 - 1.2 = 44.5 \text{ kN}$$

车道集中荷载作用下:

$$Q_{0,pk} = (1 + \mu) \cdot \xi \cdot m_0 \cdot p_k \cdot y_k = (1 + 0.18) \times 1.00 \times 0.438 \times 214.2 \times 1.000 \\ = 110.70 \text{ kN}$$

车道荷载作用下的支点剪力为

$$Q_0 = Q_{0,qk} + Q_{0,pk} = 44.5 + 110.7 = 155.2 \text{ kN}$$

⑥计算支点截面人群荷载最大剪力

人群荷载的横向分布系数如图 4.31b 所示。

$$\text{附加三角形荷载重心的影响线坐标为: } \bar{y} = 1 \times (19.5 - \frac{1}{3} \times 4.9) / 19.5 = 0.916$$

故可得人群荷载的支点剪力为:

$$Q_{0r} = m_c \cdot P_{or} \cdot \Omega + \frac{a}{2} (m_0 - m_c) P_{0r} \cdot \bar{y} = 0.62 \times 2.25 \times 9.75 \\ + \frac{1}{2} \times 4.9 \times (1.422 - 0.62) \times 2.25 \times 0.916 \\ = 13.60 + 4.05 \\ = 17.7 \text{ kN}$$

### 3. 内力组合及包络图

#### (1) 内力组合

在按各种极限状态来设计钢筋混凝土及预应力混凝土梁时,需要确定主梁沿桥跨方向各截面的内力组合设计值,它是将各类作用代表值引起的最不利内力分别乘以相应的分项系数和组合系数后,按规定的组合效应组合而得到的作用效应组合设计值。

内力组合方法及其表达式参见本书第 1.3.4 内容。

#### (2) 内力包络图

如果沿梁轴的各个截面处,将所采用控制设计的计算内力值按适当的比例尺绘成纵坐标,其中右半跨的弯矩值( $M_{\max}$ )对称于左半跨,右半跨的剪力值( $Q_{\min}$ )反对称于左半跨( $Q_{\max}$ ),连接这些坐标点而绘成的曲线,就称为内力包络图,如图 4.38 所示。对于小跨径梁如仅计算  $M_{\frac{1}{2}}$  以及  $Q_{\frac{1}{2}}$ ,则弯矩

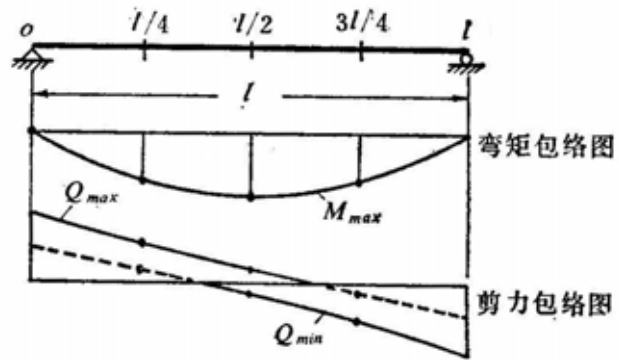


图 4.32 内力包络图

包络图可绘成二次抛物线,而剪力包络图绘成直线形。

内力包络图既已确定,就可按钢筋混凝土或预应力混凝土结构设计原理和方法来设计整根梁内纵向主筋,斜筋和箍筋,并进行各种验算。